

**BARLANGBEJÁRATOK FELKERESÉSÉNEK
KOMBINATORIKUS OPTIMALIZÁLÁSA**

**COMBINATORICAL OPTIMIZATION OF VISITING CAVE
ENTRANCES**

TARSOLY PÉTER – BEKK TÍMEA

Óbudai Egyetem Alba Regia Műszaki Kar
Geoinformatikai Intézet, 8000, Székesfehérvár, Pirosalma u. 1-3.,
tarsoly.peter@amk.uni-obuda.hu

Abstract: The cave entrances are topographical elements of the real world, and visiting those means going along some kind of routes in all cases. By numerous cave entrances it needs the optimization of the route, by solving the Travelling Salesman Problem. For the investigation I choose ten cave entrances from the Velence Hills. For the optimization I used three methods: 'the nearest point' heuristic and eager algorithm; the method of the economic path graph and the method of the Latin matrices. Investigating the distances and height differences between the cave entrances in Hamilton-circles, the optimal solution gives the 'shortest route choosing the smallest bad' optimization method. The 'the nearest point' algorithm and the method of the economic path graph allow of forward optimisation according to particular viewpoints; by the Latin matrices method it is possible to take selection conditions into consideration with the management of the graph. I presented on the end of the paper the opportunity of the storage of a planned route with a QR-code, with the application of a Prüfer-code.

Bevezetés

A barlangbejáratok a topográfiai elemekkel leírható tér részét képezik, és felkeresésük minden esetben valamilyen útvonalon való végighaladást igényel. A lehetséges útvonalak két legfontosabb paramétere: az egyes útvonalakhoz rendelt távolság és magasságkülönbség. Amennyiben egy kutatásba – függetlenül a kutatás céljától és szakterületétől – sok barlangot vonunk be, úgy célszerű lehet a barlangok felkeresésének útvonal optimalizálása. A feladat megoldása az operációkutatásból ismert TSP-probléma (TSP – Travelling Salesman Problem), magyarul az utazó ügynök probléma megoldását igényli Hamilton-út vagy Hamilton-kör tervezésével. Az operációkutatás, mint a matematika egyik önálló ága csak a második világháború alatt alakult ki, ám már korábban is voltak olyan optimalizálási feladatok, amelyekkel ma ez a tudományterület foglalkozik. Az utazó ügynök probléma első megfogalmazása egy 1832-ben megjelent német kereskedelmi tankönyvben található (SCHRIJVER 2005), ám ebben még matematikai részletek nem szerepeltek. A probléma matematikai szempontból történő vizsgálá-

ta az 1930-as években kezdődött, és az egyik legszélesebb körben tanulmányozott feladattá vált. Ennek egyik oka, hogy rendkívül sok különböző területen alkalmazható, így a barlangkutatókban is.

A feladat a matematika nyelvére lefordítva a következőképpen hangzik: adott egy n csúcsú teljes gráf, ahol minden élsúly ismert. Ebben a gráfban keressük a legkisebb összsúlyú Hamilton-kört (olyan kör, amely a gráf minden csúcsán pontosan egyszer halad át). Ebben a modellben a barlangok szerepét a gráf csúcsai, a köztük vezető utakat a gráf élei, az utak hosszát pedig az élsúlyok veszik át (*BAJALINOV – BEKÉNÉ 2010*). Amennyiben vissza akarunk térni a kiindulási helyre, akkor valóban Hamilton-kört kell tervezni, de amennyiben csak annyi a cél, hogy minden barlangot felkeressünk egyszer, és a kezdő-és végpont különböző lehet, akkor elegendő Hamilton-utat tervezni.

A feladat megoldásához gyakran vezetnek be kiegészítő feltételeket az élsúlyokra vonatkozóan, amelyek segítségével a probléma egyszerűsíthető (*MAYEDA 1976, BAGYINSZKI 2011*). Ezek az alábbiak.

- Pozitivitás: a legtöbb esetben feltehető, hogy a gráf élsúlyai nemnegatívak. Mivel a feladat optimális megoldásának megtalálása szempontjából csak az élsúlyok egymáshoz viszonyított arányai számítanak, ezért az élsúlyok tetszőleges pozitív számmal szorozhatóak, illetve a súlyokhoz tetszőleges valós szám hozzáadható, mert ezáltal csak az optimum értéke változik meg, az optimális megoldás nem (*LAWLER 1982*).
- Teljesség: nagyon gyakran feltételezhető az is, hogy a gráf teljes, vagyis bármely két csúcsa között található él, nincsenek tiltott útvonalak. Ha mégis lennének ilyenek, akkor ezeket kellően nagy élsúllyal hozzávéve a gráfhoz teljes gráfot kaphatunk.
- Szimmetria: a szimmetrikus utazó ügynök problémában a gráfunk irányítatlan. Amennyiben teljesül a szimmetria, a feladat lehetséges megoldásainak száma a felére csökken. A barlangkutatókban a TSP-probléma szimmetrikus megfontolását használjuk; vagyis a távolság két barlang között mindkét irányban azonos.
- Metrikusság: amennyiben a gráf élsúlyai eleget tesznek a távolságfüggvények axiómáinak (szimmetrikus, csak pozitív élsúlyok szerepelnek benne, és teljesül rájuk a háromszög-egyenlőtlenség is), akkor metrikus utazó ügynök problémáról beszélhetünk.

Kisméretű euklideszi utazó ügynök problémák megoldásában azt találták, hogy 10-20 pont esetén rendkívül jó eredménnyel képes az emberi elme a feladatot megoldani (*MACGREGOR – ORMEROD 1996*). A pontok számának növelésével az emberi megoldás hatékonysága folyamatosan romlik (*DRY et al. 2006*), ami nem meglepő, hiszen n csúcspont esetén az ösz-

szes lehetséges bejárési útvonal száma $(n-1)!$, és a csúcspontok számának növelésével a feladat végigszámolása sokszor számítógépek segítségével is reménytelen. Gráfokban a legrövidebb Hamilton-körök és utak megtalálására ma algoritmusokat használunk.

A vizsgálat munkaterülete

A feladat mintaterének a Velencei-hegység barlangjai, barlangszerű objektumai, álbarlangjai és mesterséges üregei közül választottam ki tíz darabot a Pákozdi Ingókövek Természetvédelmi Területről és a Meleg-hegyi Gránitsziklák Természetvédelmi Területről, amelyek megközelítését Pákozdról a Kő utcai parkolóból terveztem (*I. táblázat*). A tervezést az üregek között mérhető légvonalbeli távolságokkal hajtottam végre. Ezek a távolságok nem egyeznek meg azokkal a távolságokkal, amelyeket a terepen kell végigjárni utak, ösvények és nyiladékok mentén, azonban közöttük egyenes arányosság áll fent, így az optimalizálás helyes eredményre vezet.

I. táblázat
Table.I.

A vizsgálatba bevont barlangok
The list of the investigated caves

Pákozdi Ingókövek TT		
Név	Kataszteri sorszám	Rövidítés a táblázatokban
Gomba-kő barlangja	4510-516	G
Siklóbőrös-sziklaeresz	4510-533	S
Rejtek-barlang	4510-519	R
Meleg-hegyi gránitsziklák TT		
Név	Kataszteri sorszám	Rövidítés a táblázatokban
Bárcaházi-barlang	4510-501	B
Polák-hegyi-álbarlang	4510-525	P
Borjú-völgyi-álbarlang	4510-518	BO
Páfrányos-barlang	4510-528	Pa
Cserkupacsos-barlang	4510-532	CS
Diétás-barlang	4510-534	D
Cserepes-barlang	4510-535	CSE

Útvonal optimalizálás a legközelebbi pont hozzáadása algoritmussal

A TSP-probléma megoldására kitalált számtalan algoritmus közül én a legközelebbi pont hozzáadása nevű heurisztikus, mohó algoritmus használtam. A legközelebbi pont hozzáadása heurisztika szerint az összeállított részkörutat bővíteni kell a meglévő útvonal végpontjához legközelebbi ponttal. Ha minden pont szerepel már az útvonalban, akkor az utolsót összekötjük az elsővel, és így képezzük a Hamilton-kört. A feladat megoldásához egy mátrixot kell létrehozni, amelynek sorai és oszlopai az egyes pontok egymáshoz

viszonyított távolságait tartalmazzák. Az egyes pontoknak önmagukra vonatkoztatott távolságait nem értelmezzük, ezért a mátrix főátlójába a ∞ jelet kell írni, így biztosítva, hogy a feladat megoldása során biztosan a következő pont felé történjen elmozdulás. A mátrix a főátlóra szimmetrikus, így csak a főátló feletti rész kitöltése szükséges.

A vizsgálat során az alábbi optimalizálási lehetőségeket vizsgáltam a barlangok lehetséges felkeresése szempontjából.

1. Legrövidebb út optimalizálása: ebben az esetben a gráf egyes csúcspontjaiból a továbbhaladás mindig a legközelebbi csúcspont irányába történik.
2. A legkisebb magasságkülönbség optimalizálása: ebben az esetben a gráf egyes csúcspontjaiból a továbbhaladás mindig a legkisebb magasságkülönbségű csúcspont irányába történik. Ekkor a bejárési útvonal hossza nem lesz minimális. A bejárás figyelmen kívül hagyja, hogy a csekély magasságkülönbségű barlangok között lehetnek akár jelentős magasságkülönbséggel bíró topográfiai formák is.
3. A legkisebb magasságkülönbség optimalizálása indítófeltétel megadásával: megoldási módszerében megegyezik a legkisebb magasságkülönbség optimalizálásával, azzal a kikötéssel, hogy a kezdőpontból a legközelebbi pontba kell elmozdulni, függetlenül annak magasságkülönbségétől.
4. Magasságkülönbséggel súlyozott legrövidebb út optimalizálása: a megoldásnál a távolság értékek súlyozását végeztem el a magasságkülönbségek dekaméteres mértékegységben adott értékével. Ebben az esetben az elmozdulás a legkisebb értékkel rendelkező csúcspontba történik.
5. Magasságkülönbséggel súlyozott legrövidebb út optimalizálása indítófeltétel megadásával: megoldási módszerében megegyezik a magasságkülönbséggel súlyozott legrövidebb út optimalizálásával, azzal a kikötéssel, hogy a kezdőpontból a legközelebbi pontba kell elmozdulni, függetlenül annak magasságkülönbséggel súlyozott értékétől.
6. Egy méterre jutó magasságváltozás függvényében optimalizált legrövidebb útvonal: a megoldás során a távolság és magasságkülönbség értékek alapján elvégeztem az egy méterre jutó magasságváltozás számítását centiméter mértékegységben. Az egy centimétert el nem érő változásokat 0-nak tekintettem. Az elmozdulás ebben az esetben a legcsekélyebb magasságváltozással járó pontba történik; egyezés esetén az elmozdulásról a legrövidebb távolság függvényében kell dönteni.

7. Egy méterre jutó magasságváltozás függvényében optimalizált legrövidebb útvonal indítófeltétel megadásával: megoldási módszerében megegyezik az egy méterre jutó magasságváltozás függvényében optimalizált legrövidebb útvonal megadásával, azzal a kikötéssel, hogy a kezdőpontból a legközelebbi pontba kell elmozdulni, függetlenül a magasságváltozás értékétől.
8. Egy méterre jutó magasságváltozás függvényében súlyozott legrövidebb út optimalizálása: a megoldásnál a távolság értékek súlyozását végeztem el az egy méterre jutó magasságváltozások függvényében. Ebben az esetben az elmozdulás a legkisebb értékkel rendelkező csúcspontba történik; egyezés esetén az elmozdulásról a legrövidebb távolság függvényében kell dönteni.
9. Egy méterre jutó magasságváltozás függvényében súlyozott legrövidebb út optimalizálása indítófeltétel megadásával: megoldási módszerében megegyezik az egy méterre jutó magasságváltozás függvényében súlyozott legrövidebb útvonal optimalizálásával, azzal a kikötéssel, hogy a kezdőpontból a legközelebbi pontba kell elmozdulni, függetlenül a magasságváltozás értékétől.
10. A legrövidebb útvonal megadása a legkisebb rossz választásával: ebben az esetben a csúcspontból való továbbhaladás előtt meg kell vizsgálni a legkisebb távolság és legkisebb magasságkülönbség értékkel rendelkező csúcspontokat. Amennyiben a két érték ugyanarra a csúcspontra vonatkozik, úgy arra kell továbbhaladni. Amennyiben a két érték két különböző csúcspontnál jelentkezik, úgy meg kell vizsgálni a távolságok arányát. Amennyiben a legkisebb magasságkülönbséggel rendelkező csúcspontba vezető távolság és a legrövidebb távolság aránya nem haladja meg az 1.5:1 arányt, úgy a legkisebb magasságkülönbség irányába kell továbbhaladni.

A legközelebbi pont hozzáadása algoritmussal kapott eredmények értékelése és elemzése

Az egyes módszerek összehasonlítása során minden esetben kiszámítottuk a Hamilton-kör és Hamilton-út értékét méterben, továbbá a kör és út során megtett magasságkülönbségeket. A vizsgálat eredményeit a *II. táblázat* tartalmazza. Az egyes optimalizálási módszerekre a *II. táblázatban* a fenti felsorolásban/ismertetésben adott sorszámokkal (1-10) hivatkozunk. Előljáróban megjegyezzük, hogy véleményünk szerint a gyakorlatban a Hamilton-kör tervezésének van inkább jelentősége, amennyiben elfogadjuk azt a feltételt, hogy terepre autóval érkezünk; így a bejárt útvonal kezdő- és végpontja egybe kell, hogy essen.

Az egyes optimalizálási módszerek összehasonlító táblázata (d – távolság, Δm – magasságkülönbség)
 The comparative table of the single optimisation methods (d – distance, Δm – height difference)

Módszer	Hamilton-út		Hamilton-kör	
	d [m]	Δm [m]	d [m]	Δm [m]
1	6942	231	11290	268
2	16387	123	20735	160
3	15125	158	17739	162
4	11818	133	12519	162
5	13147	158	15761	162
6	15806	143	19627	223
7	13985	170	17806	250
8	14727	115	18548	195
9	13906	165	17727	245
10	8887	213	11501	217

Amennyiben a legrövidebb bejárési útvonal tervezése a legfőbb szempont, akkor a legrövidebb út optimalizálása módszer (1) adja a legjobb eredményt Hamilton-út és kör esetében is. Ekkor a megteendő magasságkülönbség a lehetséges legkisebb magasságkülönbségnek több, mint kétszerese.

Amennyiben a legkisebb magasságkülönbség leküzdése a legfőbb szempont, akkor az egy méterre jutó magasságváltozás függvényében súlyozott legrövidebb út optimalizálása módszer (8) adja a legjobb eredményt Hamilton-út esetében. Ezzel lényegében ekvivalensnek tekinthető a legkisebb magasságkülönbség optimalizálása (2). A 2-es és 8-as megoldások esetében a megteendő Hamilton-út hossza a legrövidebb lehetséges útnak több mint 2.1-szerese.

Legkisebb magasságkülönbség leküzdése és Hamilton-kör esetére a legjobb megoldást a legkisebb magasságkülönbség optimalizálása (2) adja, de ezzel egyenértékűnek lehet tekinteni további három megoldást: legkisebb magasságkülönbség optimalizálása indítófeltétel megadásával (3), magasságkülönbséggel súlyozott legrövidebb út optimalizálása (4), magasságkülönbséggel súlyozott legrövidebb út optimalizálása indítófeltétel megadásával (5). Az említett négy megoldás (2,3,4,5) alkalmazásával megtett Hamilton-körben a magasságkülönbségek ugyan minimálisak, de a megteendő utak egymástól és a lehetséges legrövidebb útvonaltól több-kevesebb mértékben különböznek. A legjobb egyezést a legrövidebb útvonallal, a magasságkülönbséggel súlyozott legrövidebb út optimalizálása (4) adja; ebben az esetben a kettő aránya mindösszesen 1.1, míg a 2,3,5-ös megoldások esetében ez az érték 1.4, 1.6 és 1.8.

Szuboptimálisnak tekinthető megoldást ad a legrövidebb útvonal megadása a legkisebb rossz választásával (10) Hamilton-út és kör esetére is.

Hamilton-út esetében a megtett út a lehetséges legrövidebb útnak 1.3-szorosa, a leküzdendő magasságkülönbség pedig a legrövidebb bejárható útvonalhoz tartozó magasságkülönbségnek 0.9-ed része. A legkisebb magasságkülönbséghez képest a magasságkülönbség értéke 1.8-szoros, azonban a megteendő út a legkisebb magasságkülönbséghez tartozó út 0.6-ed része. Hamilton-kör esetében a megtett út a lehetséges legrövidebb úttal egyezőnek tekinthető (1.02-szerese), a leküzdendő magasságkülönbség pedig a legrövidebb bejárható útvonalhoz tartozó magasságkülönbség 0.8-ed része. A legkisebb magasságkülönbséghez képest a magasságkülönbség értéke 1.4-szeres, azonban a megteendő út a legkisebb magasságkülönbséghez tartozó út 0.6-ed része.

Összefoglalóan az alábbi megállapításokat tehetjük a gyakorlat szempontjából lényeges Hamilton-körökre vonatkozóan:

- Amennyiben a tervezési szempont a legrövidebb útvonal bejárása, tekintet nélkül a leküzdendő magasságkülönbségre, akkor matematikailag a legjobb megoldást a legrövidebb út optimalizálása (1) adja. Ekkor a barlangok felkeresésének sorrendje: KO-G-R-S-P-Pa-CS-CSE-D-B-BO-KO.

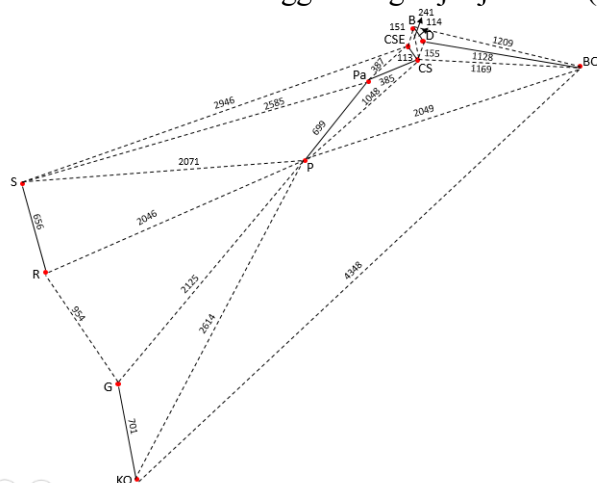
- Amennyiben a tervezési szempont az útvonal bejárása a legkisebb magasságkülönbség leküzdése szerint, akkor a legjobb megoldást a magasságkülönbséggel súlyozott legrövidebb út optimalizálása (4) adja. Ekkor a barlangok felkeresésének sorrendje: KO-P-Pa-BO-CS-CSE-D-B-R-S-G-KO.

- Amennyiben a tervezési szempont a legrövidebb útvonal bejárása mellett a leküzdendő magasságkülönbségeket is figyelembe veszi, úgy a legjobb megoldást a legrövidebb útvonal megadása a legkisebb rossz választásával (10) nevű módszer adja. Ekkor a barlangok felkeresésének sorrendje: KO-G-R-S-Pa-CS-CSE-D-B-BO-KO.

Az optimális útvonal meghatározása a gazdaságos faváz módszerével

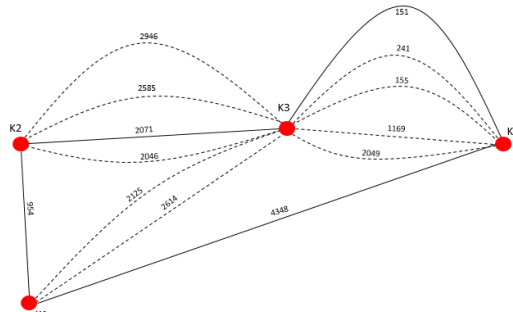
A gazdaságos faváz keresésének problémája a következő módon általánosítható. Rendeljünk egy összefüggő G gráf minden éléhez egy-egy számot. G egy G' részgráfja értékén a G' éleihez rendelt számok összegét értjük, és keressük a G egy minimális értékű favázát (*ANDRÁSFAL* 1983). Ez a módszer csak abban az esetben vezet az optimális megoldáshoz, amennyiben az élek értékei mind különbözők, ez azonban az élekhez rendelt távolság értékek esetén mindig biztosítható. Elméletileg elképzelhető olyan eset, amikor két él teljesen azonos távolságértékkel rendelkezik, azonban ebben az esetben, ha valamelyiket akár csak egy milliméter értékkel is megváltoztatjuk, a feladat egyértelművé válik, az okozott változás pedig nem befolyásolja mértékadóan a bejárando összes távolságot. A megoldás első lépésében a bar-

langok között háromszögeket kell képezni, majd rendeljük hozzá minden egyes háromszögoldalhoz az adott oldal hosszát méterben. Minden egyes gráfpontból kiindulva rajzoljuk meg folytonos vonallal az azt élt, amelyik a legkisebb távolságértékkel rendelkezik. Lehetséges, hogy ugyanazt az élt mind a két végéből kiválasztjuk. Az így létrejövő G_1 gráf az eredeti G gráf egy körmentes, nem feltétlen összefüggő részgráfját jelöli ki (1. ábra).



1. ábra A körmentes, nem összefüggő G_1 részgráf kijelölése a barlangok között
Fig.1. The designation of the acyclic, not relating G_1 subgraph between the caves

Most forrasszuk össze G -nek G_1 azonos komponenseibe eső pontjait egy-egy ponttá, és töröljük a létrejövő hurokéleket. Az így létrehozott H_1 gráfban ismét rajzoljuk meg minden csúcspontból folyamatos vonallal azokat az éleket, amelyek a legkisebb távolság értékkel bírnak. Ebben az esetben azonban figyelembe kell venni a háromszög-egyenlőtlenség szabályt is, így kiválasztásra kerülhet olyan él is, ami ugyan nem a legrövidebb, de az útvonal bejárása során nem teszi szükségessé egy előző pontba való visszatérést. A háromszög-szabálynak megfelelően egy előző pontba való visszatérés, majd innen az útvonal folytatása mindenképpen hosszabb lenne, mint a visszatérés nélküli közvetlen továbbhaladás. A G_1 -ből létrejövő gráfot jelöljük G_2 -vel, és a mintafeladat itt véget is ért, hiszen sikerült megalkotni egy összefüggő gráfot (2. ábra). A K_2 és K_3 között nem a legrövidebb él került kiválasztásra, mert ez ebben az esetben a Siklóbőrös-sziklaereszből a Rejtekek-barlanghoz igényelt volna visszatérést, és ez hosszabb, mintha a sziklaeresztől közvetlenül a Polák-hegyi-álbarlanghoz mennénk el.

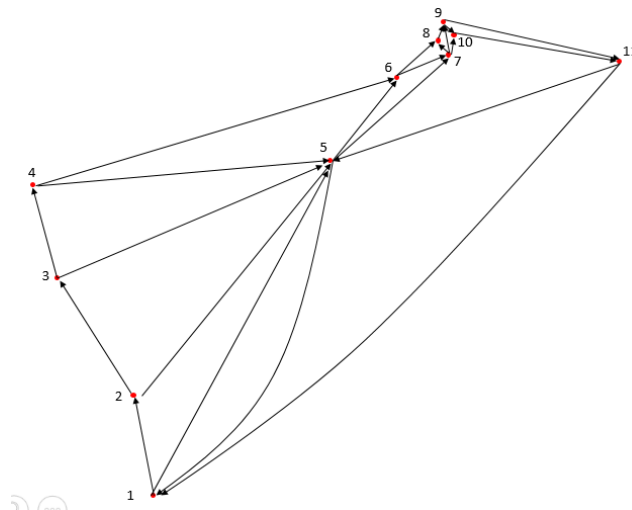


2. ábra A G2 összefüggő gráf kijelölése a G1 gráf azonos komponenseibe tartozó összevont pontjai között
 Fig.2. The designation of the connected G2 graph between the contracted points (belonging to identical components) of the G1 graph

A gazdaságos faváz módszerével előállított gráf lényegében egy Hamilton-kör, amit a mintapéldában a legrövidebb útvonal kiválasztására optimalizáltam. A módszer általánosnak tekinthető, tehát használatával elvégezhető egy útvonal tetszőleges szempontok szerinti optimalizálása.

Az optimális útvonal meghatározása latin mátrixok segítségével

A feladat megoldásának első lépéseként lássuk el tetszőleges sorszámokkal a felkeresendő barlangokat és rajzoljunk meg közöttük egy irányított gráfot. A gráfélek irányítását azért tehetjük meg, mert az előzetes tervezés során kialakul egy lehetséges bejárési terv, amit a barlangok akár térképről leolvasható topográfiai viszonyai határoznak meg (3. ábra). Tekintsük a létrehozott G gráf $A=[a_{ij}]$ csúcsmátrixát, és írjuk be $a_{ij} \neq 0$ helyébe a_{ij} -szer a szóban forgó éleket mutató (p_i, p_j) gráfpontok jeleit. A csúcsmátrixból ilyen módon létrejövő mátrixot nevezzük latin mátrixnak (ANDRÁSFÁI 1983), amelyet M-el jelölünk. Az M mátrixból hagyjuk el a számpárok első tagjait és így nyerjük M' mátrixot. Az M és M' mátrix az 1 hosszúságú sétákat jelöli ki a G gráfban. Képezzük az $M \cdot M'$ szorzatot a szokásos sor-oszlop kompozíciókkal, de e kompozíciókban az oszlopok elemeivel való szorzások csak egyszerű hozzáírások, az összeadások pedig csak egymás alá írássok legyenek, és csak olyan számsorozatokot írjunk le, amelyben nincs ismétlődés. A szorzást folytatva rendre a 2,3...c-1 hosszúságú sétákat kapjuk meg.



3. ábra Irányított gráf létrehozása latin mátrix készítéséhez
 FIG.3. The formation of a directed graph for making Latin matrices

Az $M \cdot M^{c-2}$ mátrix elemei a G-beli irányított Hamilton-utakat jelölik ki. A módszer előnye, hogy valamennyi Hamilton-utat tartalmazza a mátrix, így elméletileg tetszőlegesen választhatjuk meg a bejárás kezdőpontját. Az eredeti tervezési feladat szerint a Kő utcai parkolóból terveztük az indulást, ezért számunkra csak azoknak a Hamilton-utaknak van jelentősége, amelyek az 1-es pontból indulnak (III. táblázat).

III. táblázat
 Table.III.

Az 1-es pontból induló Hamilton-utak a latin mátrix módszerrel meghatározva
 The Hamilton roads leaving from the 1 point, defined with the method of the Latin matrices

Sorszám	Útvonal	Hossz [m]
1	1,2,3,4,6,7,8,9,10,11,5	8836
2	1,2,3,4,6,8,9,10,11,5,7	9773
3	1,2,3,4,6,8,9,11,5,7,10	9895
4	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11	6942

A III. táblázat alapján látható, hogy összesen négy olyan Hamilton-út van, amely az 1-es pontból indul, és a legrövidebb távolság szerint optimalizálva a 4-es számú adja a legjobb megoldást. A további optimalizálási szempontokat célszerű a gráf irányításával figyelembe venni. Minél inkább átgondolt az élek irányítása, és minél több lehetőséget zárunk a helyi mozgásra pl. a magasságkülönbségek miatt, annál egyszerűbb lesz a latin mátrix, és a vele elvégzendő szorzások sora. Ha az $M \cdot M^{c-1}$ mátrix képzése során megengedjük, hogy az elemeket alkotó sorozatok utolsó tagja az elsővel megegyezzen, akkor e mátrixokban a főátló minden eleme annyi számsoro-

zatot tartalmaz, amennyi irányított Hamilton-kör van G-ben. A számsorozatok sorrendje kijelöli a Hamilton-körök bejárési irányát. A főátlón kívüli elemek ebben a mátrixban mind nullák lesznek. A IV. táblázat foglalja össze a mintafeladatban kijelölhető Hamilton-köröket.

IV. táblázat
Table.IV

A latin mátrix módszerrel kijelölt Hamilton-körök
Hamilton-circles defined with the method of the Latin matrices

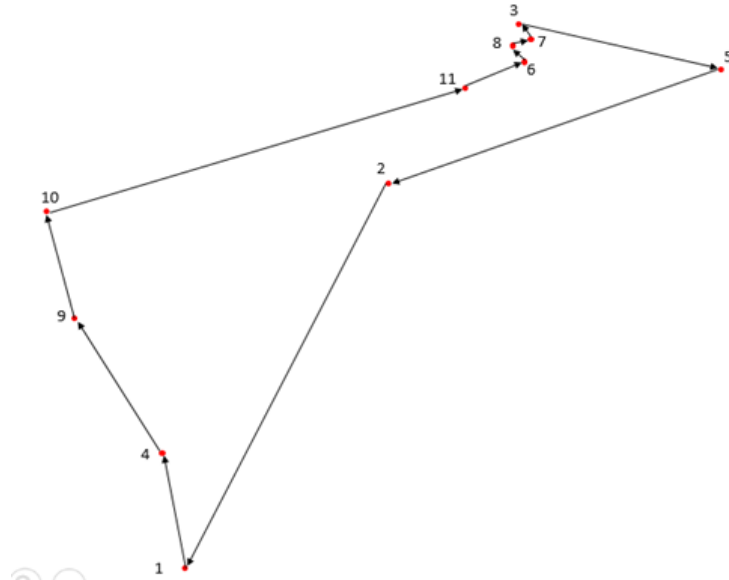
Sorszám	Útvonal	Sorszám	Útvonal
1	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,1	6	7,8,9,10,11,1,2,3,4,5,6,7
2	2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,1,2	7	8,9,10,11,1,2,3,4,5,6,7,8
3	3,4,5,6,7,8,9,10,11,1,2,3	8	9,10,11,1,2,3,4,5,6,7,8,9
4	4,5,6,7,8,9,10,11,1,2,3,4	9	10,11,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10
5	6,7,8,9,10,11,1,2,3,4,5,6	10	11,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11

A IV. táblázatból látható, hogy az 5-ös sorszámú pontból a gráf irányítása miatt nem indítható Hamilton-kör. Akkor célszerű ilyen megkötetést alkalmazni, ha a szóban forgó pont topográfiai viszonyai vagy megközelítésének nehézsége egy adott irányból ezt szükségessé teszi. A módszer a mátrix képzés szabályainak megfelelően a legrövidebb Hamilton-kört adja eredményül, és a további optimalizálási szempontokat itt is célszerű a gráf irányításával figyelembe venni.

Az optimális útvonal tárolásának lehetőségei

Az optimális útvonal tárolása egyszerű gráfok és metrikus adatok mellett több másféle módszerrel is megoldható. Vizsgálatunk során egy olyan QR-kódot készítettünk, amely a bejárési útvonalat Prüfer-kód formájában tárolja, a gráfélekhez tartozó metrikus információt pedig egy színfokozatos mátrix írja le. A QR-kódok bevezetése a gráfok által tárolt információ tárolására a digitális képeken megvalósuló alakfelismeréshez kapcsolódik. Az ilyen módon létrehozott fekete-fehér, kétdimenziós ábrák akár egy mobiltelefonnal lefényképezve visszafejthetők. A visszaalakításhoz a telefonon szükség van egy alkalmazásra, ami lefényképezi és a megfelelő módon továbbítja az adatokat. A feladat megoldása során alakítsuk át az irányított gráfot mátrixszá. Sorszámozzuk be a gráf csúcspontjait pozitív, egész számokkal növekvő sorrendben olyan módon, hogy az 1-es sorszámot a gráf kiindulópontja kapja. Amennyiben az útvonal optimalizálása során szerepelt indítófeltétel, úgy a 2-es sorszámot mindenképpen a feltételben megszabott csúcspontnak kell kapnia; ettől eltekintve azonban a sorszámok csúcspontokhoz rendelése tetszőleges lehet. A legrövidebb útvonal megadása a legkisebb rossz válasz-

tásával nevű módszer szerint tervezett útvonal egy lehetséges számozását a 4. ábra mutatja.



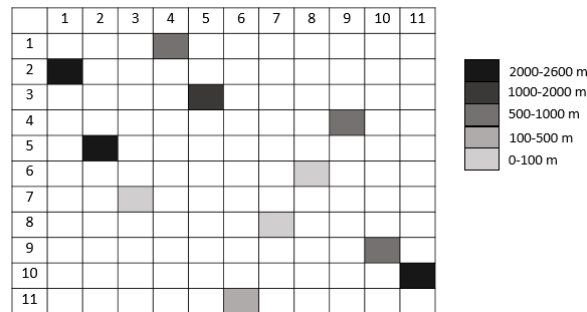
4. ábra A legrövidebb útvonal megadása a legkisebb rossz választásával nevű módszer segítségével optimalizált útvonal sorszámozása

Fig.4. Numbering the route points given by the 'shortest route choosing the smallest bad' optimization method

Ezt követően állítsunk elő egy olyan mátrixot, amelynek sor és oszlopszáma megegyezik a tervezett útvonalban szereplő pontok számával, majd a mátrix sorait és oszlopait számozzuk be a csúcspontok sorszámaival. A számok alkotják a mátrixban a gráf pontjait, és amennyiben van (a,b) éle \vec{G} -nek, akkor az a-adik sor b-edik celláját töltsük ki valamilyen színnel. Lehet, hogy minden cella azonos színt kap, ebben az esetben a mátrix csak annyi információt hordoz, hogy milyen útvonalon kell a barlangokat felkeresni. Amennyiben a cella színezése valamilyen színfokozattal történik, úgy a szín mennyiségi információt is képes kifejezni, és az is leolvasható, hogy a két barlang között mekkora a távolság. A 4. ábra alapján az V. táblázatban összefoglalt mátrixot lehet elkészíteni, színfokozatokkal jelölve az egyes barlangok közötti távolságot. A kevesebb színfelhasználás érdekében a távolságokat intervallumokra osztottam, de a szürkességi skála 0-255 közötti értékei sokkal több intervallum definiálását is lehetővé teszik.

V. táblázat
Table.V.

Az optimalizált útvonal megjelenítése mátrixos formában színfokozat alkalmazásával
The hypsometric representation of the optimized route in a matrix



A gráfelméletben egy n csúcshú számozott fa Prüfer-kódja egy $n-2$ hosszú számsorozat. A kód tulajdonképpen $n-1$ hosszúságú, csak az utolsó elem elhagyható, mert az mindig n . Tekintsünk egy tetszőleges fát az $\{1,2,\dots,n\}$ csúcsokon, és rendeljünk hozzá egy számsorozatot a következőképpen: hagyjuk el a fa elsőfokú csúcsai közül azt, amelyiknek a legkisebb a sorszáma, és közben annak a csúcsnak írjuk fel a sorszámát, amellyel az elhagyott csúcs össze volt kötve. Legyen ez v_1 . Ezt ismételjük, amíg már csak egy csúcs marad. Ez a csúcs az n -edik sorszámú, hiszen egy fának mindig van legalább 2 elsőfokú csúcsa, és n -nél csak kisebb sorszámú csúcsok vannak, így előbb azokat hagyjuk el. Az így kapott v_1, v_2, \dots, v_{n-2} számsorozat a fa Prüfer-kódja. Amennyiben az optimalizált útvonalat szeretnénk Prüfer-kód segítségével tárolni, úgy a feladat megkezdése előtt lássuk el tetszőleges pozitív egész számokkal a gráf csúcspontjait. Amennyiben előre tudnánk az útvonalat, akkor a csúcspontokat a bejárás sorrendjében is számozhatnánk 1-től kezdődően, és ebben az esetben a Prüfer-kód egy növekvő számsorozat lenne 2-től $n-1$ -ig. Mivel előre nem tudjuk az optimalizált útvonalat, csak sejtésünk lehet, ezért a számok hozzárendelését tekintjük véletlenszerűnek (5. ábra). A 4. ábrán feltüntetett útvonal Prüfer-kódja: 4 5 9 3 7 8 6 11 10. A Prüfer-kódból a fa visszaállítható a következő módon. Adjuk hozzá a Prüfer-kódhoz utolsó elemként az n -et. Kiválasztjuk azt a legkisebb pozitív természetes számot, amelyik nem szerepel a sorozatban (Prüfer-kód, és n). A létrehozandó fában összekötjük ezt a számot a sorozat első elemével. Ezt a legkisebb számot hozzáadjuk a sorozathoz, majd töröljük a sorozat első elemét. Ezt a folyamatot addig folytatjuk, ameddig el nem fogynak az eredeti sorozat elemei. A QR-kód generálására több ingyenes webes felület is van. A kód felépítése szabványosított, felépítését a felhasználónak nem

kell ismernie ahhoz, hogy ilyet generálni tudjon. Én a <http://qr-kod.hu/> weboldal szolgáltatását használtam fel. A kódot úgy terveztük meg (5. ábra), hogy középen az V. táblázatnak megfelelő mátrixos útvonal leírás látszódjon, körülötte pedig fekete-fehér négyzetekkel a Prüfer-kód legyen rögzítve, amelyet vissza lehet fejteni a bejárás útvonalát leíró gráffá (4. ábra).



5. ábra Az optimalizált útvonal QR-kódja
Fig.5. The QR-code of the optimized route

Összefoglalás

A barlangbejáratok a topográfiai elemekkel leírható tér részét képezik, és felkeresésük minden esetben valamilyen útvonalon való végighaladást jelent, amely sok felkeresendő barlang esetében az útvonal optimalizálását igényli a TSP-probléma megoldásával. A feladat mintaterének a Velencei-hegység barlangjai, barlangszerű objektumai, álbarlangjai és mesterséges üregei közül választottuk ki tíz darabot a Pákozdi Ingókövek Természetvédelmi Területről és a Meleg-hegyi Gránitsziklák Természetvédelmi Területről. A barlangok felkeresésének optimalizálásához három módszert vizsgáltunk: a legközelebbi pont hozzáadása nevű heurisztikus, mohó algoritmust, a gazdaságos faváz kiválasztásának módszerét és a latin mátrixok segítségével történő megoldást. A gyakorlat szempontjából lényeges Hamilton-körökben vizsgálva a különböző optimalizálási feltételekkel számítható távolságértékeket és magasságkülönbségeket, azt a következtetést lehet levonni, hogy az optimálisnak tekinthető megoldást a legrövidebb útvonal megadása a legkisebb rossz választásával nevű módszer adja. A legközelebbi pont hozzáadása algoritmus és a gazdaságos faváz módszere lehetővé teszi az előre meghatározott szempontok szerinti optimalizálást, a latin mátrixok segítségével történő megoldásnál viszont a kiválasztási feltételeket a gráf irányításával lehet figyelembe venni. A dolgozat végén bemutattuk az optimalizálással tervezett útvonal tárolásának lehetőségét QR- és Prüfer-kód alkalmazásával.

IRODALOM

ANDRÁSFAI B. (1983): Gráfelmélet. Folyamok, mátrixok – Akadémiai Kiadó, Budapest, 260 p.

BAGYINSZKI T.B. (2011): Az utazó ügynök probléma – Budapesti Corvinus Egyetem Közgazdaságtudományi Kar, Kézirat, Budapest, 43 p.

BAJALINOV E. – BEKÉNÉ RÁCZ A. (2010): Operációkutatás II, Az utazó ügynök problémája – Kempelen Farkas Hallgatói Információs Központ, Kézirat, 7 p.

DRY M., LEE M.D. – VICKERS D. – HUGHES P. (2006): Human performance on visually presented traveling salesperson problems with varying numbers of nodes – The Journal of Problem Solving, 1(1), pp. 4.

LAWLER L. E. (1982): Kombinatorikus optimalizálás: hálózatok és matroidok – Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 358 p.

MACGREGOR, J.N. – ORMEROD T. (1996): Human performance on the traveling salesman problem – Attention, Perception, & Psychophysics, 58(4), pp. 527-539.

MAYEDA W. (1976): Alkalmazott gráfelmélet – Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 523 p.

SCHRIJVER A. (2005): On the History of Combinatorial Optimization, in Handbooks in Operations Research and Management Science, – In: Aardal, K. – Nemhauser, G. L. – Weismantel R., Elsevier, pp. 1-68.