



Térbeli feszültségállapotok átszámítása a faanyag anatómiai főirányainak rendszerébe

GARAB József¹, POLGÁR Rudolf², SZALAI József¹

¹ NymE FMK, Műszaki Mechanika és Tartószerkezetek Intézet

² Universitas Fidelissima Kft.

Kivonat

A faanyaggal kapcsolatos anyagvizsgálatok során az esetek többségében az anatómiai főirányok rendszerében határozzák meg a fizikai-mechanikai anyagjellemzőket. Ha az anatómiai főirányoktól eltérő rendszerben van szükség az anyagállandókra, akkor a tenzortranszformációs szabályok felhasználásával meghatározhatjuk azokat. A számítások elvégzéséhez szükség van a két koordináta-rendszer egymáshoz viszonyított elhelyezkedéséhez. Ennek magadása három, alkalmasan megválasztott szög-gel történhet. Fordított a helyzet, ha a faanyagra használható tönkremeneteli elméleteket kívánjuk alkalmazni. Ezek az elméletek úgy működnek, hogy bennük a feszültségi állapotokat az anatómiai főrendszerben kell megadni. A külső terhelésből származó feszültségi állapot általában a szerkezethez kötött koordináta-rendszerben ismert, ezt kell átszámítani a faanyag anatómiai rendszerébe. E számításokhoz az első feladatnál meghatározott transzformációs mátrix transzponáltját kell felhasználnunk. Hasonló a feladat, ha a tönkremeneteli elméletek ellenőrzéséhez végzünk kísérleteket, ill. számításokat. Korábban, triaxiális nyomóvizsgálat segítségével térbeli feszültségállapotot hoztak létre általános orientációjú jegenyefenyő (*Abies alba*) próbatesteken. Célunk a próbatesten uralkodó triaxiális feszültségállapot transzformálása volt a faanyag anatómiai főirányainak rendszerébe (L, R, T). Bemutatjuk a térbeli feszültségállapot átszámítását teljesen általános orientációjú próbatestek esetén, melynek alapja a próbatest felületén mérhető szögek és az Euler-szögek közötti kapcsolat. Az átszámított térbeli feszültségállapotokat már fel lehet használni a tönkremeneteli elméletek alkalmazhatóságának ellenőrzéséhez.

Kulcsszavak: triaxiális nyomóvizsgálat, térbeli feszültségállapot, jegenyefenyő (*Abies alba*), feszültségállapot transzformációja

Transformation of triaxial stress states into the anatomical coordinate system of wood

Abstract

The mechanical properties of wood are determined in the system of the anatomical main directions (L, R, T) of wood. To apply anisotropic strength criteria, the stress states should be given in the L, R, T coordinate system, as well. The goal of this study was to transform triaxial stress states on European Silver Fir (*Abies alba*) samples into the anatomical coordinate system of wood. The stress states were given in the coordinate system of the specimens edges thus the application of the strength criteria were unsuitable. Therefore, the stress states should have been calculated into the system of the anatomical main directions.

Key words: triaxial compression tests, triaxial stress states, European Silver Fir (*Abies alba*), stress state transformation

Bevezetés

A faanyag fizikai-mechanikai tulajdonságai jelentősen függenek a rostiránytól. Egy csekély szögeltérés már számottevő hatással lehet a tulajdonságok nagyságára. Fűrészáru vizuális osztályozásánál figyelembe veszik a szögeltérést, és a nagyságától függően osztályokba sorolják a fűrészárut (pl. MSZ EN 14081-1).

Többdimenziós feszültségállapot esetén a feszültségi állapot pontos ismerete szükséges. A legnagyobb nehézséget a feszültségi állapot átszámítása okozza a faanyag anatómiai főirányainak rendszerébe. A transzformációs szabályok és az egyes tengelyek körüli forgatások már régóta ismertek (pl. Malvern 1969), valamint az átszámítási eljárásról is születtek tanulmányok (Bindzi és Samson 1995; Goodman és Bodig 1970) azonban ezeknek a módszereknek az a hátrányuk, hogy csak bizonyos esetekben érvényesek (pl. csak az anatómiai fősíkban alkalmazhatók).

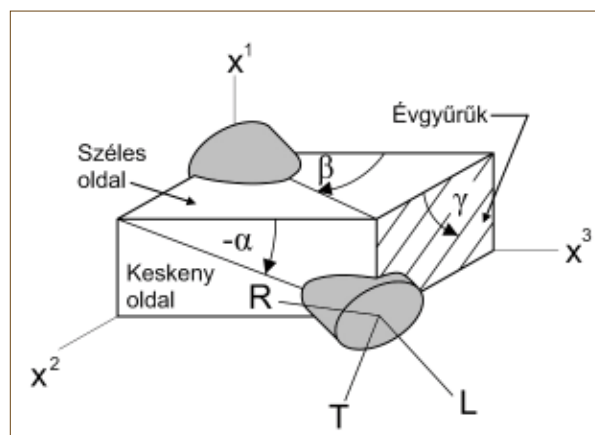
Hermanson és tsai. (1997) kifejlesztettek egy olyan transzformációs eljárást, amelyik teljesen általános orientáció esetén is érvényes. A módszer alapja a felületen mérhető szögek (rostirány, évgyűrűállás) és az Euler-szögek közötti matematikai kapcsolat. A munkánk célja kísérletileg meghatározott általános térbeli feszültségállapotok átszámítása a faanyag anatómiai főirányainak rendszerébe felhasználva Hermanson és tsai. (1997) összefüggéseit.

Elméleti ismertető

A faanyagot ortogonálisan anizotrop anyagnak lehet modellezni L , R , T ortonormális egységvektorok segítségével, ahol L – a rostirány (longitudinális irány), R – a sugárirány (radiális irány), T – a húrirány (tangenciális irány). Az általános orientációt ferde rostlefutásnak vagy ferdeszálúságnak nevezzük. A ferde rostlefutás szögeltérés a rostirányhoz képest. A ferde rostlefutás okainak vizsgálata nélkül (pl. helytelen fűrészelés, csavarodott növekedés) a ferdeszálúság mértékét úgy lehet mérni, hogy a rostok vetületét vizsgáljuk a próbatest felületén. A faanyag élei és a rostok vetületei által bezárt szögek a rostlefutási szögek (α , β). Egy egyenes helyzetű úgy lehet megadni a térben, hogy két egymásra merőleges síkon vizsgáljuk a vetületét, tehát a próbatest két (keskeny és széles) oldalán mért rostlefutási szögek (α , β) egyértelműen meghatározzák a rostirányt (L). Egy harmadik szög ismerete is szükséges, hogy az R és T irányok helyzetét meg tudjuk határozni. A harmadik szög az évgyűrűállás szöge (γ), amit a próbatest fennmaradó, harmadik síkján tudunk mérni, így meg tudjuk határozni az L , R , T rendszer pontos helyzetét a fahasáb éleihez képest (1. ábra). A mért évgyűrűállás szöge általános orientáció esetén a TL sík és az x^1x^2 sík metszete.

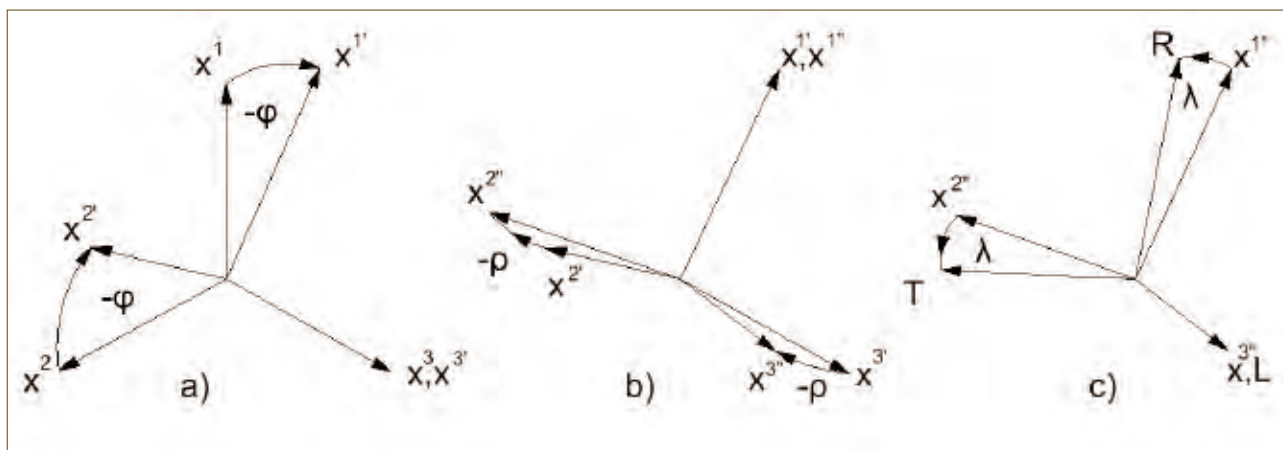
Ha a próbatest élei nem egyeznek meg az anatómiai főirányokkal, akkor a rugalmas állandókat vagy a ható feszültségi állapotot transzformálni kell a faanyag anatómiai főirányainak rendszerébe (pl. Hearmon 1948; Bodig és Jayne 1993; Szalai 1994). A problémát az jelenti, hogy a próbatest élei szabálytalan helyzetben vannak a faanyag anatómiai főirányaihoz képest, és az iránykoszinuszokat közvetlenül nem ismerjük.

Azonban egy geometriai objektum tetszőleges térbeli helyzetét megadhatjuk három egymást követő forgatással, melyeket az Euler-szögek segítségével (ϕ , ρ , λ) tudunk megoldani, ezért a transzformációs mátrix előállításához szükség van az Euler-szögek ismeretére. A 2. ábra bemutatja, hogyan lehet eljutni három forgatással a fa-



1. ábra Általános orientációjú rostirány a próbatest éleinek a koordináta-rendszerében (x^1 , x^2 , x^3). A rostirány vetületei az oldalakon az α és β szög, valamint a TL sík és az x^1x^2 sík metszete a γ szög (Hermanson és tsai. 1997)

Figure 1 Wood fiber at general orientation with respect to specimen axes x^1 , x^2 , and x^3 with projections onto specimen faces shown by angles α and β and the intersection of the TL and the x^1x^2 planes shown by γ (Hermanson et al. 1997)



2. ábra Az anatómiai főirányok helyzetének meghatározása az Euler-szögek segítségével: a) forgatás x^3 tengely körül b) forgatás x^1 tengely körül c) forgatás x^3 tengely körül (Hermanson és tsai. 1997)

Figure 2 Determination of the anatomical main directions using the Euler-angles: a) Rotation about x^3 axis b) rotation about x^1 axis c) rotation about x^3 axis (Hermanson et al. 1997)

anyag anatómiai főirányainak rendszerébe. Az Euler-szögeket közvetlenül nem tudjuk megadni, de Hermanson és tsai. (1997) meghatározták a faanyag felületén mérhető szögek (α , β , γ) és az Euler-szögek (ϕ , ρ , λ) közötti kapcsolatrendszerét. Ezeket az összefüggéseket felhasználva tudjuk transzformálni a térbeli feszültségállapotokat az L , R , T rendszerbe.

A felületen mérhető szögek és az Euler-szögek közötti kapcsolat a következő (Hermanson és tsai. 1997):

Az x^3 tengely körüli forgatás szöge ϕ :

$$\phi = \arctan\left(\frac{\sin \alpha \cos \beta}{-\cos \alpha \sin \beta}\right) \quad [1]$$

A szingularitás elkerülése miatt, ha β nulla és α nem egyenlő nullával, akkor legyen ϕ egyenlő $\pi/2$ -vel.

Az x^1 tengely körüli forgatás szöge ρ :

Ha ϕ nem egyenlő nullával, akkor ρ megoldása a következő:

$$\rho = \arctan\left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha \sin \phi}\right) \quad [2]$$

Azonban, ha ϕ nullával egyenlő, akkor ρ -t így kapjuk meg:

$$\rho = \arctan\left(\frac{-\sin \beta}{\cos \beta \cdot 1}\right) \quad [3]$$

Az utolsó Euler-szög (λ) az évgyűrűállás szögéből számolható ki és az x^3 tengely (L) körüli forgatást jelenti:

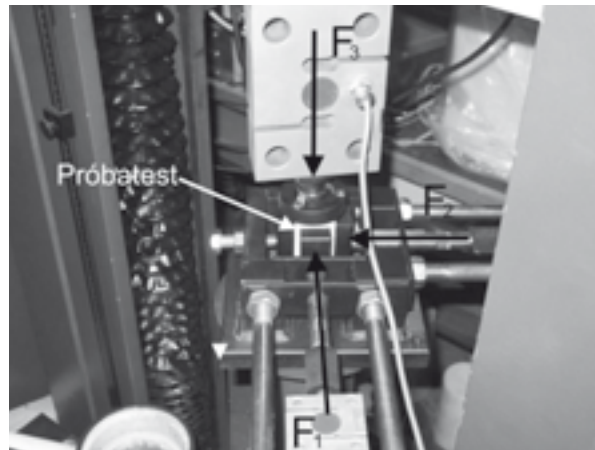
$$\lambda = \arctan\left(\frac{\sin \gamma \cos \phi - \cos \gamma \sin \phi}{\cos \rho (\cos \gamma \cos \phi + \sin \gamma \sin \phi)}\right) \quad [4]$$

Az Euler-szögek ismeretében a transzformációs mátrix előállítható. Az x^1 , x^2 , x^3 koordinátarendszerben érvényes feszültségi állapot transzformációját az L , R , T rendszerbe bemutatja a következő transzformációs mátrix:

$$\bar{\kappa} = \kappa_i^j = \kappa_j^i = \begin{bmatrix} \cos \rho & \sin \rho \sin \phi & -\sin \rho \cos \phi \\ \sin \lambda \sin \rho & \cos \lambda \cos \phi - \sin \lambda \cos \rho \sin \phi & \cos \lambda \sin \phi + \sin \lambda \cos \rho \cos \phi \\ \cos \lambda \sin \rho & -\sin \lambda \cos \phi - \cos \lambda \cos \rho \sin \phi & -\sin \lambda \sin \phi + \cos \lambda \cos \rho \cos \phi \end{bmatrix} \quad [5]$$

Kísérleti anyagok és módszerek

Vágó (2005) hasáb alakú jegenyefenyő faanyagon (*Abies alba*) térbeli feszültségállapotot hozott létre (3. ábra). A térbeli feszültségállapotot három egymásra merőleges irányban alkalmazott nyomóigénybevétellel állította elő FPZ-100 univerzális törőberendezéssel, valamint egy erre a célra kifejlesztett oldalirányú terhelőberendezéssel.



3. ábra Triaxiális nyomóvizsgálat hasáb alakú jegenyefenyő (*Abies alba*) próbatesten

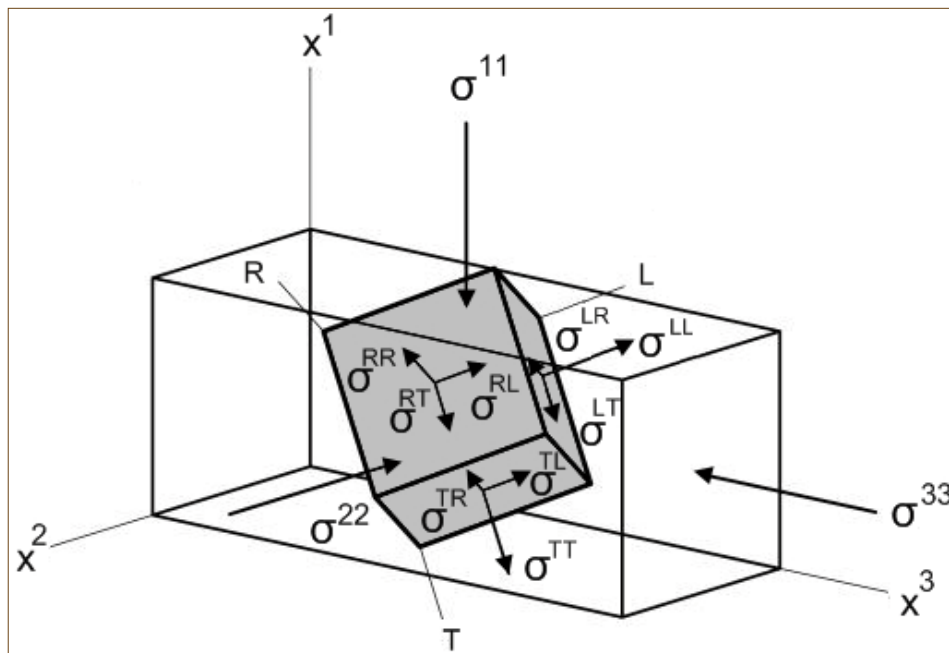
Figure 3 Triaxial compression test on prismatic European Silver Fir (*Abies alba*) sample

A tönkrementel pillanatában, a hasáiban kialakult feszültségi állapot a próbatest éléinek rendszerében (meg-
egyezik a terhelési irányokkal) a következő alakot veszi fel:

$$\bar{\bar{\sigma}}(x^1, x^2, x^3) = \begin{bmatrix} \sigma^{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^{33} \end{bmatrix} \quad [6]$$

Ha a próbatest élei nem esnek egybe a faanyag anatómiai főirányaival ($x^1 \neq L, x^2 \neq R, x^3 \neq T$), akkor a feszültségi állapot a faanyag anatómiai főirányainak rendszerében módosul (4. ábra). Látható, hogy nyírófeszültségek is fellépnek a normálfeszültség mellett.

$$\bar{\bar{\sigma}}(L, R, T) = \begin{bmatrix} \sigma^{LL} & \sigma^{RL} & \sigma^{TL} \\ \sigma^{LR} & \sigma^{RR} & \sigma^{TR} \\ \sigma^{LT} & \sigma^{RT} & \sigma^{TT} \end{bmatrix} \quad [7]$$



4. ábra Triaxiális nyomóterhelés során fellépő feszültségállapot a próbatest éléinek a koordináta-rendszerében (x^1, x^2, x^3), illetve a faanyag anatómiai főirányainak rendszerében (L, R, T)

Figure 4 Stress state due to triaxial compression in the coordinate systems of the specimen axes (x^1, x^2, x^3) and the anatomical main directions of wood (L, R, T)

A feszültségállapot transzformációja

A hasáb alakú próbatest három oldalát szemből lefényképeztük a videoextenzométer kamerájával (Messphysik). Ezután CAD szoftver segítségével meghatároztuk a rostirányok oldalirányú vetületeinek meredekségét (α , β), illetve az évgyűrűállás szögét (γ).

A felületen mért szögekből meghatároztuk az Euler-szögeket. Az Euler-szögeket a jobbkéz-szabály szerint értelmezzük a 2. ábrának megfelelően. [1-4] segítségével meghatároztuk az Euler-szögeket minden egyes próbatest esetén. Ezután, az Euler-szögek ismeretében a transzformációs mátrix [5] előállítására lehetőség volt.

A térbeli feszültségállapot transzformációját a tenzorelmélet segítségével tudjuk elvégezni. A próbatest éleinek a koordinátarendszerében uralkodó feszültségállapot átszámítása a faanyag anatómiai főirányainak rendszerébe a következő:

$$\sigma^{i'j'} = \sigma^{ij} \kappa_i^{i'} \kappa_j^{j'} \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad \text{és} \quad i', j', k' = L, R, T \quad [8a]$$

ahol:

$\kappa_i^{i'}; \kappa_j^{j'}$ - transzformációs mátrix [5] elemei

$\sigma^{i'j'}$ - feszültségi állapot a faanyag anatómiai főirányainak koordinátarendszerében (L, R, T)

σ^{ij} - feszültségi állapot a próbatest éleinek koordinátarendszerében (x^1, x^2, x^3)

Kifejtve, az egyes tenzorkomponensek meghatározása a következő:

$$\begin{aligned} \sigma^{LL} &= \sigma^{11} \kappa_1^L \kappa_1^L + \sigma^{22} \kappa_2^L \kappa_2^L + \sigma^{33} \kappa_3^L \kappa_3^L \\ \sigma^{LR} &= \sigma^{11} \kappa_1^L \kappa_1^R + \sigma^{22} \kappa_2^L \kappa_2^R + \sigma^{33} \kappa_3^L \kappa_3^R \\ \sigma^{LT} &= \sigma^{11} \kappa_1^L \kappa_1^T + \sigma^{22} \kappa_2^L \kappa_2^T + \sigma^{33} \kappa_3^L \kappa_3^T \\ \sigma^{RL} &= \sigma^{11} \kappa_1^R \kappa_1^L + \sigma^{22} \kappa_2^R \kappa_2^L + \sigma^{33} \kappa_3^R \kappa_3^L \\ \sigma^{RR} &= \sigma^{11} \kappa_1^R \kappa_1^R + \sigma^{22} \kappa_2^R \kappa_2^R + \sigma^{33} \kappa_3^R \kappa_3^R \\ \sigma^{RT} &= \sigma^{11} \kappa_1^R \kappa_1^T + \sigma^{22} \kappa_2^R \kappa_2^T + \sigma^{33} \kappa_3^R \kappa_3^T \\ \sigma^{TL} &= \sigma^{11} \kappa_1^T \kappa_1^L + \sigma^{22} \kappa_2^T \kappa_2^L + \sigma^{33} \kappa_3^T \kappa_3^L \\ \sigma^{TR} &= \sigma^{11} \kappa_1^T \kappa_1^R + \sigma^{22} \kappa_2^T \kappa_2^R + \sigma^{33} \kappa_3^T \kappa_3^R \\ \sigma^{TT} &= \sigma^{11} \kappa_1^T \kappa_1^T + \sigma^{22} \kappa_2^T \kappa_2^T + \sigma^{33} \kappa_3^T \kappa_3^T \end{aligned} \quad [8b]$$

Eredmények

Az 1. táblázatban látható 10 darab jegenyefenyő próbatesten elvégzett mérések eredményei. Bemutatjuk a mért felületi szögeket, a meghatározott Euler-szögeket, a próbatest éleinek rendszerében uralkodó feszültségállapotokat, illetve a faanyag anatómiai főirányainak rendszerében uralkodó feszültségi állapotokat. Meg kell jegyezni, hogy az évgyűrűállás szöge jelentős hatással van a fellépő nyírófeszültségek nagyságára (pl. a 2. számú próbatesten uralkodó $\sigma^{LR} = 14,45$ MPa), tehát az összetett feszültségi állapot sokkal veszélyesebb a tönkremenetelt illetően.

Összefoglalás és következtetések

Hermanson és tsai. (1997) által kifejlesztett módszer segítségével sikeresen tudtuk transzformálni a jegenyefenyőn elvégzett mérési adatainkat. A térbeli feszültségállapot átszámításának lépései a következők voltak:

1. Mértük a próbatest felületén lévő rostirány, és évgyűrűállás szögét (α , β , γ).
2. Meghatároztuk az Euler-szögeket (ϕ , ρ , λ).
3. Előállítottuk a transzformációs mátrixot (κ).
4. Elvégeztük a térbeli feszültségállapot transzformációját a tenzorelmélet alkalmazásával.

A későbbiekben, a tönkremenetel pillanatában, a faanyagban uralkodó térbeli feszültségállapotok segítségével ellenőrizni tudjuk a tönkremeneteli elméleteket. Mivel ismertek a térbeli feszültségállapot transzformálási szabályai a faanyag anatómiai főirányainak rendszerére, a feszültségállapot ismert a faanyag anatómiai főirányainak rendszerében is. Folytatva kutatásunkat a tönkremeneteli elméletek alkalmazhatóságát illetően, további feladat összehasonlítani a von Mises, Tsai–Wu, és az Ashkenazi tönkremeneteli elméletek alkalmazhatóságát térbeli feszültségállapot esetén. Korábbi kutatásunk (Garab és Szalai 2010) az Ashkenazi-elmélet helyességét igazolta síkbeli feszültségállapot esetén.

1. táblázat Jegenyefenyő (*Abies alba*) próbatestekre ható térbeli feszültségállapotok a próbatest éleinek koordináta-rendszerében (x^1, x^2, x^3) és a faanyag anatómiai főirányainak rendszerében (L, R, T)

Table 1 Stress states on European Silver Fir (*Abies alba*) samples due to triaxial compression. The results are given in the coordinate systems of the specimen axes (x^1, x^2, x^3) and the anatomical main directions of wood (L, R, T)

| S. sz. | α | β | γ | φ | ρ | λ | σ^{11} | σ^{22} | σ^{33} | σ^{LL} | σ^{RR} | σ^{TT} | σ^{LR^*} | σ^{RT^*} | σ^{TL^*} |
|--------|----------|---------|----------|-----------|--------|-----------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| | [°] | | | | | | [MPa] | | | | | | | | |
| 1 | 17 | 18 | 49 | -43 | -24 | -88 | -33,95 | -0,93 | -3,51 | -28,71 | -7,63 | -2,06 | -12,07 | -0,98 | 1,35 |
| 2 | 22 | 22 | 52 | -45 | -30 | -84 | -35,33 | -1,37 | -3,92 | -27,28 | -10,83 | -2,50 | -14,45 | -0,23 | 2,86 |
| 3 | 25 | 20 | 62 | -52 | -31 | -69 | -8,91 | -0,84 | -3,14 | -6,99 | -4,05 | -1,80 | -2,99 | -0,28 | 2,15 |
| 4 | 24 | 22 | 53 | -48 | -31 | -81 | -29,16 | -0,62 | -1,75 | -21,71 | -8,54 | -1,28 | -12,40 | 0,71 | 2,63 |
| 5 | -27 | -13 | 58 | -66 | 29 | -60 | -30,70 | -2,53 | -2,81 | -23,60 | -7,72 | -4,33 | 11,12 | 2,79 | -7,30 |
| 6 | 23 | 16 | 65 | -56 | -27 | -62 | -35,95 | -2,74 | -2,38 | -28,81 | -7,86 | -4,18 | -12,63 | 3,02 | 7,76 |
| 7 | -4 | -7 | 20 | -30 | 8 | 50 | -47,06 | -1,41 | -3,09 | -46,21 | -2,12 | -3,24 | -5,02 | -0,98 | -3,79 |
| 8 | -14 | -4 | 54 | -74 | 15 | -53 | -39,15 | -2,60 | -3,02 | -36,71 | -4,31 | -3,61 | 7,48 | 0,91 | -6,04 |
| 9 | -8 | -9 | 45 | -42 | 12 | 87 | -37,55 | -2,75 | -2,37 | -36,06 | -4,06 | -2,57 | -7,64 | 0,10 | 0,12 |
| 10 | -8 | -2 | 51 | -76 | 8 | -53 | -49,06 | -2,38 | -1,91 | -48,06 | -2,71 | -2,53 | 5,58 | 0,69 | -4,27 |

* $\sigma^{LR} = \sigma^{RL}$; $\sigma^{RT} = \sigma^{TR}$; $\sigma^{TL} = \sigma^{LT}$

Meg kell jegyezni azonban, hogy a hasáb alakú próbatestek triaxiális terhelése problémákat vet fel, mivel ismeretlen a terhelőkeret és a próbatest közötti súrlódó erő nagysága, valamint a többirányú nyomó igénybevételből adódóan lokális tönkremenetek is kialakulhatnak, így téves szilárdságot lehetne megállapítani (Saliklis és tsai. 1998). Ezért a kísérletek kivitelezését a geotechnikából ismert triaxiális nyomóberendezéssel hajtjuk végre henger alakú próbatesteken.

Irodalomjegyzék

- Bindzi I., Samson M. (1995): New formula for influence of spiral grain on bending stiffness of wooden beams. *Journal of Structural Engineering* 121(11):1541-1546
- Bodig J., Jayne B.A. (1993): *Mechanics of wood and wood composites*. Krieger Publishing Company, Malabar
- Garab J., Szalai J. (2010): Comparison biaxial strength criteria in the biaxial stress state. *Drewno*, 53 (1):51-66
- Goodman J.R., Bodig J. (1970): Orthotropic elastic properties of wood. *Journal of Structural Division, ASCE* 96(11):2301-2319
- Hearmon R.F.S. (1948): *The elasticity of wood and plywood*. Forest Products Research Special Report. D.S.I.R. No.7. HMSO, London
- Hermanson J.C., Stahl D.C., Cramer S.M. (1997): Transformation of elastic properties for lumber with cross grain. *Journal of Structural Engineering* 123(10):1402-1408
- Malvern L.E. (1969): *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.
- MSZ EN 14081-1 Faszervezetek szilárdság szerinti osztályozása, négyszög keresztmetszetű szerkezeti fa. 1. rész: Általános követelmények. 2006. április.
- Saliklis E.P., Cramer S.M., Hermanson J.C. (1998): Measuring the Triaxial Load – Deformation Response of Orthotropic Materials Subjected to Large and Small Strain Regimes. *Journal of Testing and Evaluation* 26(5):444-454
- Szalai J. (1994): *A faanyag és faalapú anyagok anizotrop rugalmasságtana*. I. rész: A mechanikai tulajdonságok anizotrópiája. Hillebrand nyomda, Sopron
- Vágó J. (2005): A faanyag tönkremeneteli elméleteinek kísérleti ellenőrzéséhez szükséges elméleti alapok. *Faipar* 53 (2):11-17