

# Diagonálisan terhelt anizotróp fakorong feszültségállapota

Hantos Zoltán<sup>\*</sup>

A reflexiós feszültségoptika egy látványos és célszerű roncsolásmentes anyagvizsgálati eljárás. Mivel a módszer a bevont anyag felületének alakváltozásait jeleníti meg, elvileg nincs akadálya, hogy anizotróp anyagok viselkedését vizsgáljuk vele. Kutatásaink arra az eddig még fel nem dolgozott témára irányulnak, hogy miként lehet meghatározni egy tetszőleges irányból terhelt anizotróp tárcsa (jelen esetben egy fakorong) feszültségállapotát reflexiós feszültségoptika segítségével. Az eredmények értelmezésében segítséget nyújt a feladat végesem-módszerrel történő megoldása.

**Kulcsszavak:** Feszültségoptika, Anizotrópia, Feszültségállapot

## Stress distribution in a diagonally loaded anisotropic disc

The method of reflection photoelasticity is a tangible and practical non-destructive material testing method. Its advantage is that the coating can show the deformations of the coated materials surface even if this material is anisotropic. The stress tensor of a choosen point can be easily defined with the help of photoelasticity. The author tried to find a way for solving the problem of diagonally loaded anisotropic (circular) disc with this method. For comparison, a solution by the use of Finite Element Method is also presented.

**Key words:** Photoelasticity, Anisotropy, Stresses

### Bevezetés

A szilárdságtan jellegzetesen modellalkotó tudomány. A világban előforduló anyagokat, formákat, erőket különböző szempontok szerint leegyszerűsített modellek segítségével igyekszik megismerni. Az egyszerűsítés az ára annak, hogy átláthassunk egy-egy feladatot, kivitelezhessük kísérleteinket, és megoldható összefüggéseket találjunk. Az itt bemutatandó kísérlet a feszültségoptikát igyekszik felhasználni egy fából készült próbatest erőjátékának teljes kielemezésére. Próbálkozásunk úttörő jellegű, így első lépésként egy egyszerű modellt kellett keresni.

### Diagonálisan terhelt korong feszültségállapota

Az átvilágításos feszültségoptika talán legjellegzetesebb és legtöbbször alkalmazott terhelési esete az átlósan terhelt izotróp korong ( **1. ábra** ). A tárcsán értelmezhető legegyszerűbb teher a diagonálisan működő egytengelyű húzás illetve nyomás. A tárcsában kialakuló síkbeli feszültségállapot elmélete szakirodalomból ismert. Az egyes pontokban kialakuló feszültségállapot tenzorkomponensei az alábbi összefüggésekkel meghatározhatóak:

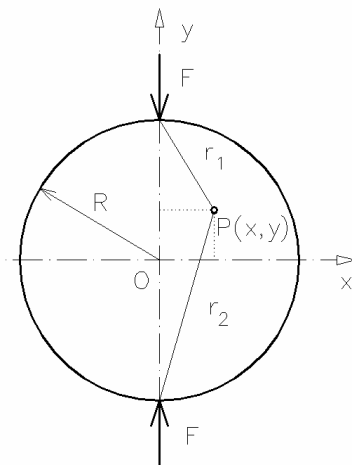
$$\sigma_x = -\frac{2 \cdot F}{\Pi \cdot d} \left[ \frac{(R-y) \cdot x^2}{r_1^4} + \frac{(R+y) \cdot x^2}{r_2^4} - \frac{1}{2 \cdot R} \right] \quad [1]$$

$$\sigma_y = -\frac{2 \cdot F}{\Pi \cdot d} \left[ \frac{(R-y)^3}{r_1^4} + \frac{(R+y)^3}{r_2^4} - \frac{1}{2 \cdot R} \right] \quad [2]$$

$$\tau_{xy} = \frac{2 \cdot F}{\Pi \cdot d} \left[ \frac{(R-y) \cdot x^2}{r_1^4} - \frac{(R+y) \cdot x^2}{r_2^4} \right] \quad [3]$$

ahol:

$d$  – a korong vastagsága, a többi változó pedig a **1. ábra** szerint értelmezendő.



**1. ábra** – Diagonálisan terhelt korong

<sup>\*</sup> Hantos Zoltán okl. faipari mérnök, doktorandusz hallgató, NyME, Építéstani Tanszék

Mivel a fenti összefüggéseket kísérleti eredmények is alátámasztják, azok oly mértékben pontosnak tekinthetők, hogy a feszültségoptikában elengedhetetlen kalibráláshoz (a műgyanta optikai állandójának meghatározása) is használható (Wolf 1976). Diagonálisan terhelte anizotróp korongról azonban alig találni említéseket a szakirodalomban, ez a terhelési eset még nem került kidolgozásra. Összefüggések kereséséhez nagy segítséget nyújthat (talán megoldási lehetőséget is), ha ismerjük az egyes pontokban kialakuló feszültségállapotot. Reflexiós feszültségoptika segítségével egy viszonylag egyszerű mérési, majd egy összetettebb számítási eljárás segítségével az egyes pontokhoz tartozó feszültségi tenzor komponensei megadhatók.

### ***Kísérleti anyagok és módszerek***

A kísérlethez lucfenyő és tölgy fajokból választottam alapanyagot. Ezekből olyan 10 cm-es átmérőjű, 1 cm vastag fakorongok készültek, melyek felülete a faanyag LR síkjában helyezkedik el. A rostlefutás és a terhelés szögét a korong forgatásával lehet módosítani, így egyfajta próbatest készítése elegendő. A mérést 8 db próbatesten végeztem el. A kísérlet előkészítése során többféle Eporezit epoxigyantát próbáltam ki. Végül a következő rendszer bizonyult a legalkalmasabbnak:

- FM-4 epoxigyanta + T-16 térhálósító (5:1 tömegarányban)
- Ragasztóréteg: AH-16 epoxigyanta + T-58 térhálósító (5:2 tömegarányban)

A próbatestek elkészítése három fázisra bontható:

- a fakorongok elkészítése
- a kétkomponensű műgyantaréteg elkészítése és darabolása
- felragasztás az alumíniumpasztával kevert műgyantával

A kísérlet során a próbatesteket egytengelyű nyomással terheltek, majd a polarizálópal előállított feszültségoptikai képekről digitális fotókat készítettünk. Ezen fotók alapján lehet a kiértékelést elvégezni.

Alkalmazott berendezések:

- a NYME FMK Műszaki Mechanika és Tartószerkezetek Intézet anyagvizsgáló laboratóriumának szakítógépe
- Tiedemann Reflecta AF 1800 típusú reflexiós polarizskóp
- Casio QV 3000 EX típusú digitális fényképezőgép

A mérésekhez alkalmazott teherintenzitás-teherorientáció kombinációkat az 1. táblázat tartalmazza. A számításokhoz szükséges anyagjellemzők minden műgyantarétegnél eltérők, ezért ezeket egyedileg meg kell határozni, hogy a mérések alapján számszerű végeredményeket tudjunk megállapítani. Ezek (A méréseket itt nem részletezve az értékek a zárójelben olvashatóak):

- $\delta$  – a műgyanta rétegvastagsága ( $\delta = 2,09$  mm)
- $E$  – a műgyanta rugalmassági modulusza ( $E = 22\,950$  N/mm<sup>2</sup>)
- $\nu$  – a műgyanta Poisson-állandója ( $\nu = 0,3$ )
- $S$  – a műgyanta optikai állandója ( $S = 16,715$  N/mm)

### ***A kísérletek értékelése***

Első lépésben az iránysávára-rendszert készítettük el. Ez egy olyan rajz, ahol a különböző polarizátor álláshoz tartozó iránysávokat egyben ábrázoljuk, jelölve az egyes iránysávokhoz tartozó szögértéket. Hasonlóképpen készül a színsávára-rendszer is. Ezen a terheléshez tartozó egész és fél rendszámú színsávok láthatóak. A feszültségek meghatározásához a feszültségoptika alapegyenletét vettük alapul (Thamm 1968).

**1. táblázat – Az egyes próbatestekre alkalmazott teherorientáció – terhelés kombinációi**

tölgy		fenyő	
$\alpha$	F (kN)	$\alpha$	F (kN)
0	10	0	5
30	5	30	1,2
45	3,2	45	1
90	2,5	90	1

$\alpha^*$  - a rostlefutás és a terhelés iránya által bezárt szög

$$m = \frac{2d}{S_\sigma} (\sigma_1 - \sigma_2) \quad [4]$$

Ahol:

$S_0$  – a feszültségoptikai állandó, amely az anyagminőségre jellemző,

$\delta$  – a felragasztott műgyantaréteg vastagsága,

$\sigma_1, \sigma_2$  – a kialakuló feszültségállapot főfeszültségei

Ebből következik, hogy a feszültségoptikai képen látható színsávok rendszára a színsávok mentén kialakuló főfeszültségek különbségével egyenesen arányos (Thamm 1968). A színsávok és irányávok a feszültségoptikai képekről leolvashatók, azokból első lépésként a nyírófeszültségek számíthatók ki.

$$\tau_{xy} = 0,5 \cdot \sin 2\varphi \cdot (\sigma_1 - \sigma_2) = 0,5 \cdot \sin 2\varphi \cdot m \cdot S / 2d \quad [5]$$

Ahol:

$\varphi$  – a polarizátorállás szöge

$m$  – a színsáv rendszára

$S$  – a műgyanta optikai állandója

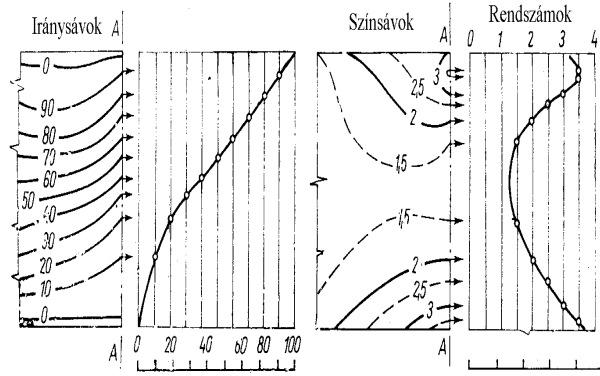
$\delta$  – a műgyantaréteg vastagsága

Mivel a feszültségeloszlást általában a modell egy teljes keresztmetszete mentén kívánjuk meghatározni, ezért előbb elkerülhetetlen az adott keresztmetszet  $\varphi$  és  $\sigma_1 - \sigma_2$  eloszlásának grafikonját felrajzolni (2. ábra). A következő lépés a normálfeszültségek meghatározása, ami többféleképpen is történhet. Egy lehetséges eljárás a Frocht-módszer. A Frocht-módszer a differenciális alakban felírt egyensúlyi egyenletek lépésenkénti numerikus integrálásával határozza meg a normálfeszültséget. Az elemi hasábra (síkbeli feszültségállapot esetén téglalpra) felírható a következő egyenletrendszer:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad [6]$$

Az egyenletcsoport első egyenletét a koordinátarendszer kezdőpontja (O) és a választott pont (P) között integrálva a következő kifejezést kapjuk:

$$\sigma_{xP} - \sigma_{xO} = - \int_0^P \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dx \quad [7]$$



2. ábra – A nyírófeszültségek számítása a leolvasható értékekből

Ha a koordinátarendszer kezdőpontjának egy terheletlen, kerület-menti pontot választunk, és az  $x$  tengely merőleges a kerületre, akkor  $\sigma_{xO} = 0$ .

A számolás egyszerűbbé válik, ha az integrálást összegzéssé egyszerűsítjük. Erre az alábbiak adnak lehetőséget: vegyünk fel a választott  $x$  tengellyel párhuzamosan,  $\pm \Delta y/2$  távolságban egy  $A$  és egy  $B$  egyenest, melyek mentén a korábban ismertetett módon határozzuk meg a csúszatófeszültségek eloszlását. Ha a  $\Delta y$  értéket kicsire választjuk, akkor az  $x$  irányú normálfeszültség értékét a következő összeggel is számíthatjuk:

$$\sigma_{xP} = - \sum_{k=1}^n \left( \frac{\tau_{xyA} - \tau_{xyB}}{\Delta y} \right) \Delta x \quad [8]$$

Ahol:

$\Delta x$  – az elemi téglalapok szélessége

$\Delta y$  – az elemi téglalapok magassága ( $A$  és  $B$  egyenesek távolsága)

$\tau_{xyA}$ , – az elemi téglalap felső éle mentén fellépő csúszatófeszültség

$\tau_{xyB}$  – az elemi téglalap alsó éle mentén fellépő csúszatófeszültség

Az erre merőleges normálfeszültség ( $\sigma_y$ ) meghatározásához a következő összefüggésből indulhatunk ki:

$$\sigma_{(1,2)P} = \frac{\sigma_{xP} + \sigma_{yP}}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\sigma_{xP} - \sigma_{yP}}{2} \right)^2 + \tau_{xyP}^2} \quad [9]$$

Amiből kifejezhető:

$$\sigma_{yP} = \sigma_{xP} - 2 * \sqrt{\left( \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)_P}{2} \right)^2 - \tau_{xyP}^2} \quad [10]$$

Ahol:

$\sigma_{xP}$  – a fentebbi összefüggéssel meghatározott normálfeszültség

$(\sigma_1 - \sigma_2)_P$  – a főfeszültségek különbsége a P pontban (színsávábrából)

$\tau_{xyP}$  – csúsztatófeszültség a P pontban

A P pontban kialakuló alakváltozási állapotot a műgyanta anyagjellemzőinek segítségével lehet meghatározni:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} \sigma_x & -\frac{\nu}{E} \tau_{xy} \\ -\frac{\nu}{E} \tau_{xy} & \frac{1}{E} \sigma_y \end{bmatrix} \quad [11]$$

Ahol:

$E$  – a műgyanta rugalmassági modulusza

$\nu$  – a műgyanta Poisson-állandója

Mivel a műgyantaréteg és a fakorong közti ragasztóréteg vékony, a deformációja elhanyagolható, a műgyanta alakváltozásai a fafelület alakváltozásaihoz azonosak. Tehát a [11]-es összefüggéssel számított alakváltozások a fakorong alakváltozásaihoz is egyben. Az így kapott eredményekből a Hooke-törvény segítségével a faanyag felületén kialakuló feszültségállapot komponensei számíthatók. (Thamm 1968, Szalai 1994)

$$\sigma^{ij} = c^{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad [12]$$

Esetünkben:

$$\begin{aligned} \sigma_{LL} &= c_{LL} \cdot \varepsilon_{LL} + 2 \cdot c_{LR} \cdot \varepsilon_{RR} \\ \sigma_{LR} &= \sigma_{RL} = c_{LR} \cdot \varepsilon_{LR} = c_{RL} \cdot \varepsilon_{RL} \\ \sigma_{RR} &= c_{LR} \cdot \varepsilon_{LL} + 2 \cdot c_{RR} \cdot \varepsilon_{RR} \end{aligned} \quad [13]$$

Ahol:

$\sigma_{ij}$  – a faanyag egyes pontjaiban kialakuló síkbeli feszültségállapot komponensei

$c_{ij}$  – a merevségi tenzor komponensei, a faanyagra jellemző állandók

$\varepsilon_{ij}$  – a faanyag felületén értelmezett deformációkomponensek

$i, j = L, R$

A módszerrel a négy fenyő próbatétel mindegyikén a függőleges és a vízszintes átló mentén határoztuk meg a  $\sigma_{LL}$  ( $\sigma_L$ : rostirányú normálfeszültség),  $\sigma_{RR}$  ( $\sigma_R$ : sugárirányú normálfeszültség) és a  $\sigma_{LR}$  ( $\tau_{LR}$ : nyírófeszültség az LR síkon) értékeinek eloszlását, majd közös grafikonon ábrázoltuk azokat.

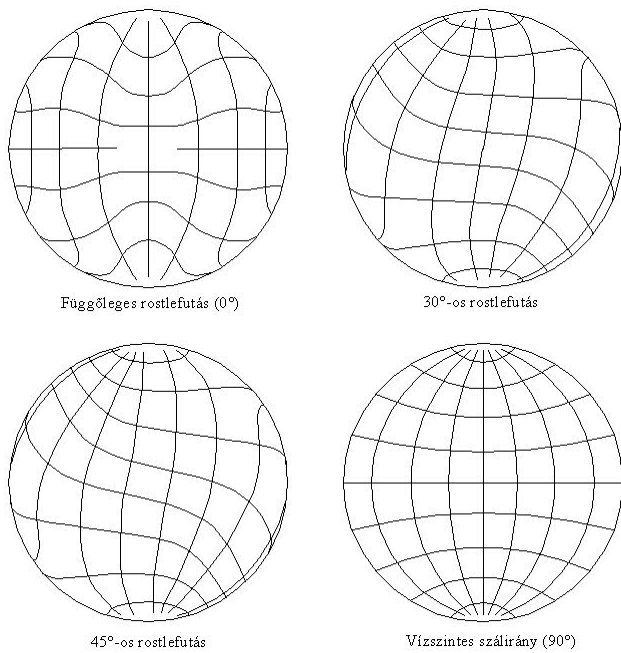
## Végelem analízis

A feladat megoldásához az AnsysED 5.5 (Swanson Analysis Systems, Houston, Tx, USA) szoftvert használtam. Ez a módszer lehetőséget biztosít a síkbeli modelltől való eltérésre, így nem tárcsaként, hanem valódi fakorongként modelleztük a próbatestet. A modell felépítéséhez „solid64 - 8” csomópontú térfogatelemet használtunk, ami ortotróp anyagtulajdonságokkal ruházható fel. A technikai állandók megadásakor a feszültség-optikai analízishez használtakkal megegyező adatokat vettünk fel. A szálirány elforgatását úgy modelleztük, hogy az anyagállandók definiálásához használt lokális koordináta-rendszert a szükséges mértékben elforgattuk az origó körül. A diagonális nyomóterhelést megoszló erőként modelleztük, hiszen a nyomópófa teherátadása is ilyen.

A számolási eredmények közül elsőként a keresztirányú feszültségeloszlást kérdeztük le, amiből megbizonyosodtunk arról, hogy a feladat annak ellenére, hogy keresztirányú alakváltozások és feszültségek is fellépnek, síkbelinek tekinthető. Ezután a rostirányú, és a sugárirányú feszültségeket, illetve a korong síkjában ébredő nyírófeszültségeket ábrázoltattuk, vízszintes és függőleges feszültségeloszlás görbe formájában. Ezeket használtuk fel az összehasonlításra. A végelem-módszer (VEM) számos más olyan eredményt is szolgáltatott, amik a kialakuló erőjáték megértését segítették.

## Eredmények

Az irányávábrából gyorsan és egyszerűen megszerkeszthető a trajektórahálózat, ami az egyes pontokban kialakuló főfeszültségi irányokat ábrázolva látványosan jeleníti meg, hogy miként vonulnak át az erők a testen ( **3. ábra** ). Az ábrákat tanulmányozva egyértelműen látszik, hogy a korongokon rostirányban (a legnagyobb merevségű irányban) vonul át a terhelés. A függőleges rostlefutású próbatestben csupán egy belső elliptikus mag vesz részt a teherfelvételben, a ferde rostlefutású korongokon a fa száliránya elcsavarja az erővonalakat, a keresztirányú terhelés erőjátéka viszont az izotróp korongokéhoz hasonlít. Ezáltal újabb bizonyítékot kaptunk arra, hogy a fa anizotróp anyag, és arra, hogy a feszültségoptika ezt valóban képes kimutatni, megjeleníteni.

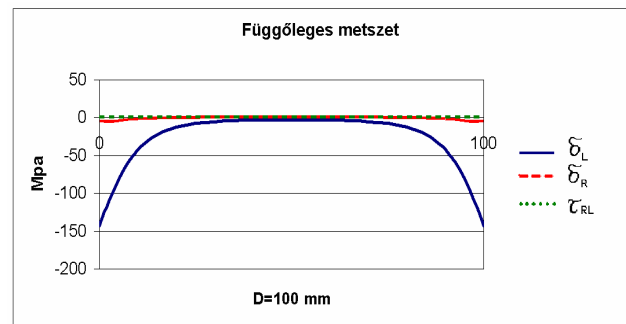
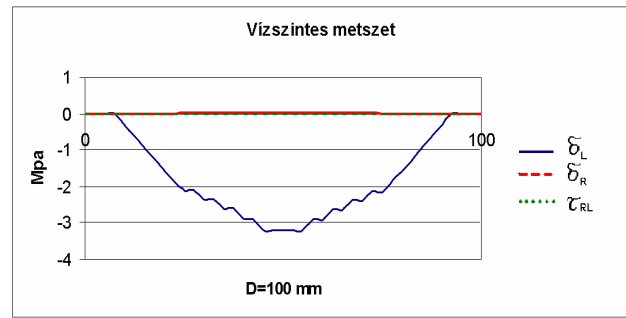


3. ábra – A tölgy próbatest trajektóriaábrái

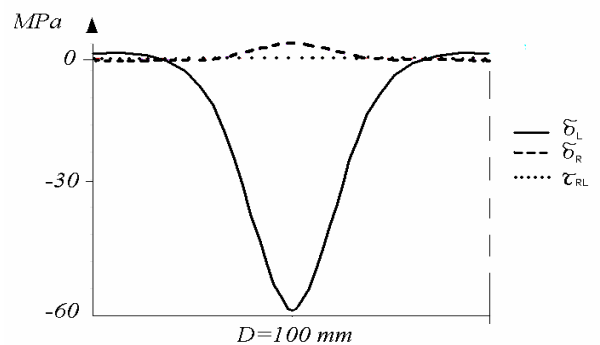
A főfeszültségi irányok az egyes pontokban gyorsan, és pontosan megállapíthatóak. A Frocht-módszer és az Ansys eredményeit összehasonlítva több-kevesebb egyezést figyelhetünk meg (4. és 5. ábrák). Az ábrákon a függőleges rostlefutású fenyő próbatest függőleges és vízszintes feszültségeloszlásai láthatók, 5 kN-os terhelés alatt. A normálfeszültségek eloszlása tekintetében a két módszer azonosnak tekinthető eredményt szolgáltatott. A nyírófeszültségeket nézve azonban azt vehetjük észre, hogy a VEM által számított jelentős értékeket a feszültségoptika nem jeleníti meg.

Feltételezve, hogy egyik módszer sem téved, valószínű, hogy a feszültségoptikai eredményeket a felragasztott műgyanta réteg erőjátéka befolyásolja, míg a VEM esetén ez nem történik meg. Ennek oka lehet, hogy az alkalmazott műgyanta rugalmassági modulusza ( $E = 23000 \text{ MPa}$ ) nagyságrendileg összemérhető a vizsgált faanyag rugalmassági moduluszával ( $E_L = 12700 \text{ MPa}$ ,  $E_R = 930 \text{ MPa}$ ). Egy másik ok lehet az, hogy a műgyanta és a fa közötti ragasztóréteg nyeli el a nyírófeszültségeket.

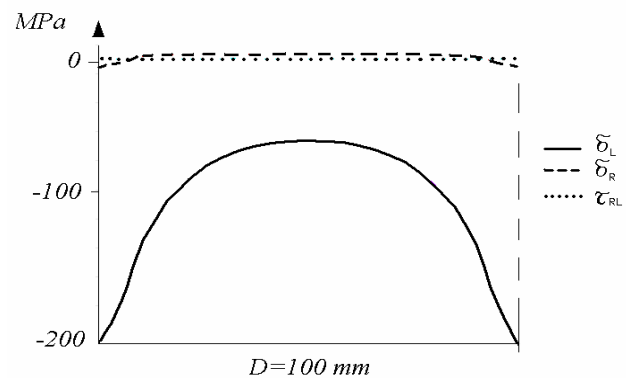
Magyarázatot adhat erre egy olyan VEM modell, ami figyelembe veszi ezeket a hatásokat is.



4. ábra – Fenyő korong feszültségeloszlása – mérési eredmények



a.



b.

5. ábra – Fenyő korong vízszintes (a) és függőleges (b) feszültségeloszlása – VEM eredmények

### **Összefoglalás**

Az elvégzett vizsgálat jó lehetőséget adott a rétegbevonatos feszültségoptika mélyebb megismerésére. Ám ahhoz, hogy ez a fémiparban elterjedt módszer fára is megbízhatóan alkalmas legyen, még néhány (a fémiparban elő nem forduló) problémát meg kell oldani. Ezek közé sorolható a rétegeként jobban megfelelő anyag alkalmazása, illetve a módszer analízisének felgyorsítása, számítógépes egyszerűsítése. Elmondható, hogy trajektória-rajzoláshoz tökéletesen használható, feszültség-analízishez pedig egyelőre fenntartásokkal alkalmas.

### **Köszönetnyilvánítás**

Feszültségoptikai kutatásaimat a Faipari Egyetemi Kutatásért Alapítvány támogatta.

### **Felhasznált irodalom**

1. Fodor T. 2000. *Tartószerkezetek II. (Bevezetés a végeelem-módszer elméletébe)* Kézirat Egyetemi Jegyzet Sopron
2. Hantos Z. 2003. *Rétegbevonatos feszültségoptika alkalmazása faanyagon* TDK dolgozat, Sopron
3. Szalai J. 1994. *A faanyag és faalapú anyagok anizotróp rugalmasság- és szilárdságtana I. (A mechanikai tulajdonságok anizotrópiája)* A szerző saját kiadása, Sopron
4. Szalai J. 1998. *Műszaki Mechanika II Szilárd Testek Sztatikája (Rugalmas- és szilárdságtan)* Egyetemi Jegyzet, NYME Sopron
5. Thamm, F. 1968. *A szilárdságtan kísérleti módszerei* Műszaki Könyvkiadó, Budapest
6. Wolf, H. 1976. *Spannungsoptik Band 1 – Grundlagen* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg – New York