

A FAANYAG TÖNKREMETETELI ELMÉLETEINEK KÍSÉRLETI ELLENŐRZÉSÉHEZ SZÜKSÉGES ELMÉLETI ALAPOK

VÁGÓ JÓZSEF *

Az anizotrop anyagokra a gyakorlati és elméleti kutatások során különböző tönkremeneteli elméleteket dolgoztak ki. Elméletileg is indokolható, hogy ezek közül melyik a legalkalmasabb a tönkremenetel előrejelzésére. Az elméletek helyességének végső bizonyítéka azonban a kísérleti ellenőrzés. A kísérletek megtervezése, de főleg kivitelezése nem egyszerű dolog. Az anatómiai főirányok helyzetét nem könnyű egy általános helyzetű fahasábon megállapítani és pontosan mérni. A feszültségi állapot átszámításához szükséges transzformációs mátrix elemeit az orientációs szögek mérésének megfelelően kell kialakítani. A kísérleti eredmények feldolgozásához szükséges elméleti eljárás menetét és módszereit mutatjuk be ebben a cikkben.

Kulcsszavak: Anizotrop tönkremeneteli elméletek, A faanyag anatómiai főirányai, Tenzor-transzformáció, Triaxiális terhelőberendezés

THEORETICAL BACKGROUND FOR THE EXPERIMENTAL VERIFICATION OF WOOD'S FAILURE THEORIES

As a result of experimental and theoretical research, various failure theories have been created for anisotropic materials. Theoretical considerations may indicate which of these theories is most suitable for predicting failure. The ultimate evidence, however, comes from experimental validation. Designing and, especially, implementing experiments is not a simple task. The determination and measurement of anatomical axes are difficult on an arbitrarily cut wooden block. Transformation matrix elements, necessary for calculating the stress conditions, are determined based upon the angles of orientation. This paper describes the methods and procedures necessary for analysing experimental results.

Key words: Anisotropic failure theories, Anatomical axes of wood, Tensor-transformation, Triaxial loading apparatus

Bevezetés

A faanyagra – mint anizotrop anyagra – alkalmazható tönkremeneteli elméleteket a méretezési gyakorlatban ma még nem alkalmazzák elterjedten. Ennek három oka is van. Az első az, hogy bár elméletileg sok érdekes és ötletes kritériumot dolgoztak ki, ezek a tudományos ismeretek nagyon nehezen kerülnek át a műszaki gyakorlatba. A második az, hogy a tönkremeneteli elméletek méretezési gyakorlatban való alkalmazásához ismerni egy adott fafaj technikai szilárdságainak teljes, ill. egy minimum rendszerét (Szalai 1994, 1996, 1997, 1998, 1999), ami egy fafaj esetén is több ezer mérést és hosszadalmas kiértékelést követel. Harmadik okként a műszaki gyakorlatnak azt a jogos kritikát fogalmazhatjuk meg, hogy nem elég széleskörű a tönkremeneteli elméletek kísérleti igazolása. A legtöbb vizsgálatot lineáris vagy igen egyszerű feszültségi állapotban végezték, akár új elméletek alapján, akár utólagosan más kísérleti eredményeit ellenőrizve (Eberhardsteiner 2002, Szalai 1994). Térbeli feszültségi állapothoz tartozó vizsgálatokról a szakirodalomban nem lehet említést találni. Különösen nem vizsgálták az Askenazi elmélet illeszkedését a kísérleti eredményekhez, mert ez a

tönkremeneteli elmélet még a tudományos világban is kevésbé ismert, annak ellenére, hogy említésre méltó eredményei vannak a többi elmélettel szemben (Szalai 1992, 1994).

Eljövendő vizsgálatainkban célul tűzzük ki egy olyan terhelő berendezés megtervezését és kivitelezését, amellyel lehetővé válik a fatest tetszőleges összetett (síkbeli vagy térbeli) feszültségi állapothoz tartozó tönkremenetelének vizsgálata, pontosabban a tönkremenetel pillanatában ható tényleges feszültségi állapot komponenseinek meghatározása (méréssel, illetve számítással).

A próbatestek és a mérőrendszer

A próbatestek mérete 40x40x80 mm. A triaxiális terhelő berendezés az **1a és b ábrán** látható. Segítségével a próbatestek két 40x80 mm-es felületein tetszőleges normáligenybevételt állíthatunk elő. A 40x40 mm-es alsó és felső lapokon fokozatosan növekvő nyomóerőt hozunk létre, egészen a próbatest tönkremeneteléig. A vizsgálat során az oldallapokon ható erő a haránt irányú alakváltozás miatt nem marad állandó. A normálerők változását folyamatosan mérjük

*Vágó József doktorandusz hallgató, NyME Műszaki Mechanika és Tartószerkezetek Intézet

A FAANYAG TÖNKREMETELI ELMÉLETEINEK KÍSÉRLETI ELLENŐRZÉSÉHEZ SZÜKSÉGES ELMÉLETI ALAPOK

VÁGÓ JÓZSEF*

Az anizotrop anyagokra a gyakorlati és elméleti kutatások során különböző tönkremeneteli elméleteket dolgoztak ki. Elméletileg is indokolható, hogy ezek közül melyik a legalkalmasabb a tönkremenetel előrejelzésére. Az elméletek helyességének végső bizonyítéka azonban a kísérleti ellenőrzés. A kísérletek megtervezése, de főleg kivitelezése nem egyszerű dolog. Az anatómiai főirányok helyzetét nem könnyű egy általános helyzetű fahasábon megállapítani és pontosan mérni. A feszültségi állapot átszámításához szükséges transzformációs mátrix elemeit az orientációs szögek mérésének megfelelően kell kialakítani. A kísérleti eredmények feldolgozásához szükséges elméleti eljárás menetét és módszereit mutatjuk be ebben a cikkben.

Kulcsszavak: Anizotrop tönkremeneteli elméletek, A faanyag anatómiai főirányai, Tenzor-transzformáció, Triaxiális terhelőberendezés

THEORETICAL BACKGROUND FOR THE EXPERIMENTAL VERIFICATION OF WOOD'S FAILURE THEORIES

As a result of experimental and theoretical research, various failure theories have been created for anisotropic materials. Theoretical considerations may indicate which of these theories is most suitable for predicting failure. The ultimate evidence, however, comes from experimental validation. Designing and, especially, implementing experiments is not a simple task. The determination and measurement of anatomical axes are difficult on an arbitrarily cut wooden block. Transformation matrix elements, necessary for calculating the stress conditions, are determined based upon the angles of orientation. This paper describes the methods and procedures necessary for analysing experimental results.

Key words: Anisotropic failure theories, Anatomical axes of wood, Tensor-transformation, Triaxial loading apparatus

Bevezetés

A faanyagra – mint anizotrop anyagra – alkalmazható tönkremeneteli elméleteket a méretezési gyakorlatban ma még nem alkalmazzák elterjedten. Ennek három oka is van. Az első az, hogy bár elméletileg sok érdekes és ötletes kritériumot dolgoztak ki, ezek a tudományos ismeretek nagyon nehezen kerülnek át a műszaki gyakorlatba. A második az, hogy a tönkremeneteli elméletek méretezési gyakorlatban való alkalmazásához ismerni egy adott fafaj technikai szilárdságainak teljes, ill. egy minimum rendszerét (Szalai 1994, 1996, 1997, 1998, 1999), ami egy fafaj esetén is több ezer mérést és hosszadalmas kiértékelést követel. Harmadik okként a műszaki gyakorlatnak azt a jogos kritikát fogalmazhatjuk meg, hogy nem elég széleskörű a tönkremeneteli elméletek kísérleti igazolása. A legtöbb vizsgálatot lineáris vagy igen egyszerű feszültségi állapotban végezték, akár új elméletek alapján, akár utólagosan más kísérleti eredményeit ellenőrizve (Eberhardsteiner 2002, Szalai 1994). Térbeli feszültségi állapothoz tartozó vizsgálatokról a szakirodalomban nem lehet említést találni. Különösen nem vizsgálták az Askenazi elmélet illeszkedését a kísérleti eredményekhez, mert ez a

tönkremeneteli elmélet még a tudományos világban is kevésbé ismert, annak ellenére, hogy említésre méltó eredményei vannak a többi elmélettel szemben (Szalai 1992, 1994).

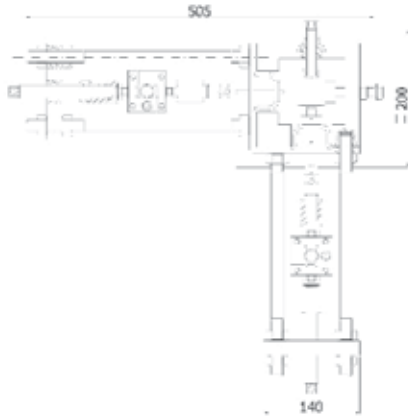
Eljövendő vizsgálatainkban célul tűzzük ki egy olyan terhelő berendezés megtervezését és kivitelezését, amellyel lehetővé válik a fatest tetszőleges összetett (síkbeli vagy térbeli) feszültségi állapothoz tartozó tönkremenetelének vizsgálata, pontosabban a tönkremenetel pillanatában ható tényleges feszültségi állapot komponenseinek meghatározása (méréssel, illetve számítással).

A próbatestek és a mérőrendszer

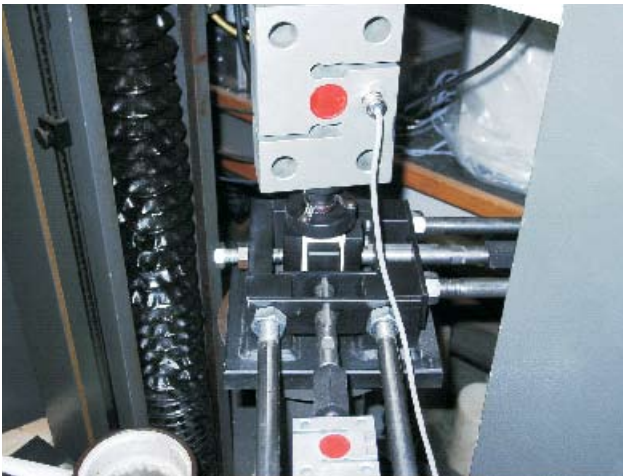
A próbatestek mérete 40x40x80 mm. A triaxiális terhelő berendezés az **1.a és b ábrán** látható. Segítségével a próbatestek két 40x80 mm-es felületein tetszőleges normáligenybevételt állíthatunk elő. A 40x40 mm-es alsó és felső lapokon fokozatosan növekvő nyomóerőt hozunk létre, egészen a próbatest tönkremeneteléig. A vizsgálat során az oldallapokon ható erő a haránt irányú alakváltozás miatt nem marad állandó. A normálerők változását folyamatosan mérjük

*Vágó József doktorandusz, Műszaki Mechanika és Tartószerkezetek Intézet, Faipari Mérnöki Kar, Nyugat-Magyarországi Egyetem.

és a tönkremenetel pillanatában regisztráljuk. Ezekből a maximális normálérből – a feszültségeloszlást egyenletesnek feltételezve – számíthatjuk a tönkremenetel pillanatában a térbeli feszültségi állapot három normálkomponensét. Ennél a terhelésnél nyírófeszültségek nem keletkeznek.

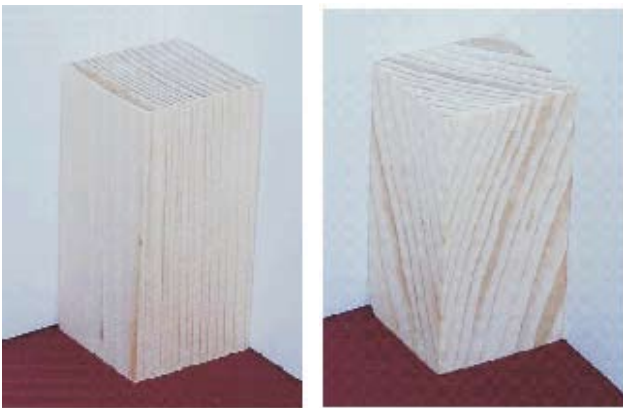


a.)



b.)

1. ábra A triaxiális berendezés és fényképe működés közben



a.)

b.)

2. ábra Lucfenyő próbatestek: az anatómiai irányok párhuzamosak a hasáb oldalélével (a) illetve általános helyzetűek (b).

A 2a. ábrán egy olyan próbatest látható, ahol a hasáb élei párhuzamosak az anatómiai főirányokkal. Az 2b. ábrán az anatómiai főirányok tetszőlegesek. A faanyagra alkalmazható tönkremeneteli elméletek úgy működnek, hogy a feszültségi állapotot mindig az anyag anatómiai főirányainak rendszerében kell megadni. Ha a próbatest élével párhuzamos koordináta-rendszert használunk (x^1, x^2, x^3 jelű tengelyekkel), akkor ebben a rendszerben a triaxiális berendezéssel létrehozható feszültségi állapot tenzorának mátrixa:

$$\bar{\bar{\sigma}}(x^1, x^2, x^3) = \begin{bmatrix} \sigma^1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^3 \end{bmatrix} \quad [1]$$

Abban a speciális esetben, amikor az anatómiai főtengelyek (L, R, T tengelyek) párhuzamosak a próbatestek élével (2a. ábra), az anatómiai főtengely-rendszerben a feszültségi állapot megegyezik az (1) mátrixszal:

$$\bar{\bar{\sigma}}(L, R, T) = \begin{bmatrix} \sigma^L = \sigma^1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^R = \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^T = \sigma^3 \end{bmatrix} \quad [2]$$

azaz nyírófeszültségek nincsenek. Ez tehát még általános térbeli feszültségi állapot.

Ha az anatómiai főirányok nem párhuzamosak a próbatest élével (2b. ábra), a feszültségi tenzor mátrixában a nyírófeszültségek is megjelennek:

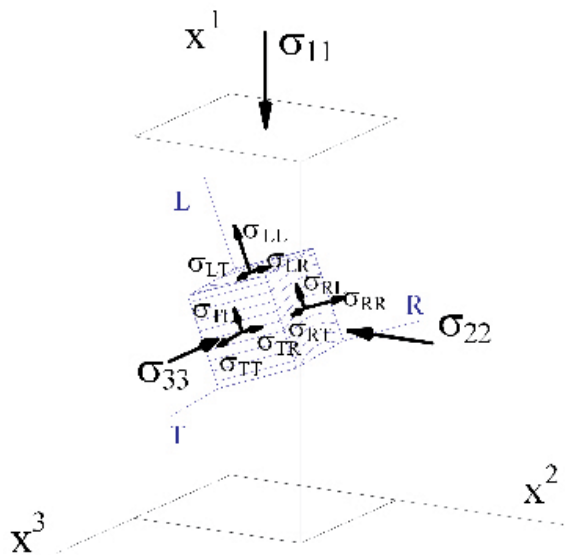
$$\bar{\bar{\sigma}}(L, R, T) = \begin{bmatrix} \sigma^L & \sigma^R & \sigma^T \\ \sigma^R & \sigma^R & \sigma^R \\ \sigma^T & \sigma^R & \sigma^T \end{bmatrix} \quad [3]$$

A feladat az, hogy meghatározzuk [1] alapján [3]-at.

Az 1. ábrán látható triaxiális berendezés alapvetően nyomóigénybevételre épült. Ilyen módon a feszültség-komponensek által alkotott hipertérnek csupán az 1/8 részét fedjük le. Elvileg elképzelhető, hogy a próbatesteket felragasztjuk a nyomópofákra és az x^2, x^3 irányokban húzzuk a próbatest oldalait. Ezzel a módszerrel változatosabb feszültségi állapotokat lehet létrehozni. A ragasztás azonban nagyon körülményessé tenné a mérést, és statisztikailag elegendő számú kísérlet kivitelezése körülményes és hosszadalmas lenne. A három oldalú nyomással is fontos információkat kapunk a teljes tönkremeneteli felületről. Az ellenőrző vizsgálat eredményei alapján a tényleges és az elméleti tönkremeneteli felület egyezésének mértéke jól megítélhető.

A feszültségi állapot átszámítása

Az átszámítás – azaz a feszültségtenzor transzformációjának – elvégzéséhez ismernünk kell a faanyag anatómiai főtengelyeinek a próbatest élei által alkotott koordináta-rendszerének tengelyeivel bezárt szögeit. Két, egymáshoz képest elforgatott koordináta-rendszer tengelyeinek egymással bezárt szögét sokféleképpen meg lehet adni (pl. az Euler-féle szögek vagy az ún. kardánszögek segítségével). Esetünkben ezeket a szögeket úgy kell megválasztani, hogy megfeleljenek a próbatestek gyártási technológiájának (a rönkön alkalmazott vágási síkok sorrendjének), ill. hogy a kész próbatesten viszonylag problémamentesen mérhetőek legyenek. A 3. ábrán láthatjuk az általánosan orientált próbatest helyzetét az éllel párhuzamos koordináta-rendszerben, valamint az anatómiai főirányokkal párhuzamosan kivágott belső hasábot az oldallapokon ható feszültségkomponensekkel.



3. ábra

Az éllel párhuzamos koordináta-rendszerből az anatómiai főirányok rendszerébe három egymás követő forgatással juthatunk el (4. ábra). Először elforgatjuk a próbatestet az eredeti x^3 tengely körül φ_3 szöggel (4a. ábra). Ekkor az x^1 az x^1 , az x^2 az x^2 helyzetbe kerül. Ez a φ_3 jól mérhető a kész próbatesten, hisz az nem más, mint az x^3 normálisú hasábfelületen a sávrendszernek a hasáb hosszabbik élével bezárt szöge. A második forgatás az x^2 tengely körül történik φ_2 nagyságú szöggel (4b. ábra). A φ_2 az x^2 normálisú hasábfelületen a sávrendszernek a hasáb hosszabbik élével bezárt szöge. Ekkor az x^1 tengely az $x^{1'}$ -be, az $x^3 = x^3$ az $x^{3'}$ -be kerül. Az $x^{1'}$ tengely már azonos a rostiránnyal. A harmadik forgatást e tengely körül

végezzük (4c. ábra). A szögelfordulás nagysága φ_1 . Most az $x^{2'}$ az $x^{2''} = R$, az $x^{3'}$ az $x^{3''} = T$ tengelybe kerül. A φ_1 az L normálisú hasábfelületen a radiális iránynak az $x^{3''}$ tengellyel bezárt szöge.

A φ_1 , φ_2 és φ_3 szögek viszonylag egyszerűen mérhetőek és egyértelműen megadják az anatómiai főtengelyek x^1, x^2, x^3 koordináta-rendszerbeli helyzetét. A tenzorkomponensek transzformációs mátrixát a három egymás utáni forgatás transzformációs mátrixának fordított sorrendben való mátrix-szorzatának eredményeként nyerjük. Az x^3 tengely körüli forgatás transzformációs mátrixa:

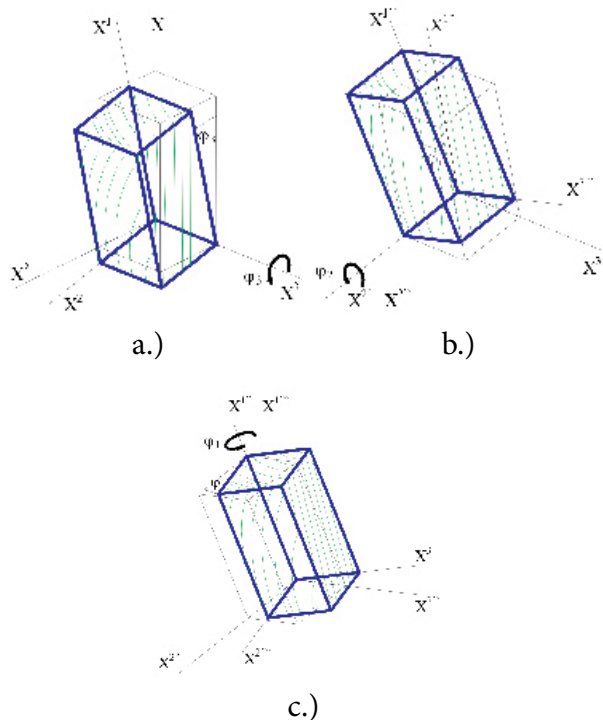
$$\beta_{i'}^i(x^3) = \begin{bmatrix} \cos \varphi_3 & \sin \varphi_3 & 0 \\ -\sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [4]$$

az x^2 tengely körüli forgatás transzformációs mátrixa:

$$\beta_{i'}^i(x^2) = \begin{bmatrix} \cos \varphi_2 & 0 & \sin \varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_2 & 0 & \cos \varphi_2 \end{bmatrix} \quad [5]$$

az x^1 tengely körüli forgatás transzformációs mátrixa:

$$\beta_{i'}^i(x^1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 \\ 0 & -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{bmatrix} \quad [6]$$



4. ábra Általános helyzetű próbatest tengelyeinek transzformációja az anatómiai főirányok rendszerébe

Az „eredő” transzformációs mátrix:

$$\beta_i = \beta_j(x^j) \left[\beta_i(x^i) \right]^{-1} = \begin{bmatrix} \beta_1^i = \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 & \beta_2^i = \cos \varphi_1 \sin \varphi_3 & \beta_3^i = \sin \varphi_1 \sin \varphi_3 \\ \beta_1^j = \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 & \beta_2^j = \cos \varphi_1 \cos \varphi_3 & \beta_3^j = \sin \varphi_1 \cos \varphi_3 \\ \beta_1^k = \sin \varphi_2 & \beta_2^k = \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 & \beta_3^k = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \end{bmatrix} \quad [7]$$

A két dimenziós tenzor transzformációs szabálya²:

$$\sigma^{i'j'} = \sigma^{ij} \beta_i^{i'} \beta_j^{j'} \quad [8]$$

esetünkben $i, j = 1, 2, 3$, és $i', j' = L, R, T$. Ezért a transzformációhoz (7) inverzét, azaz ortogonális mátrix révén transzponáltját kell használni.

$$\beta_i^{i'} = \begin{bmatrix} \beta_1^L = \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 & \beta_1^R = \cos \varphi_1 \sin \varphi_3 & \beta_1^T = \sin \varphi_1 \sin \varphi_3 \\ \beta_2^L = \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 & \beta_2^R = \cos \varphi_1 \cos \varphi_3 & \beta_2^T = -\sin \varphi_1 \cos \varphi_3 \\ \beta_3^L = \sin \varphi_2 & \beta_3^R = \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 & \beta_3^T = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \end{bmatrix} \quad [9]$$

A transzformáció eredményeként a feszültségkomponensek az anatómiai főirányok rendszerében:

$$\begin{aligned} \sigma^{LL} &= \sigma^{11} \cos^2 \varphi_2 \cos^2 \varphi_3 + \sigma^{22} \cos^2 \varphi_2 \sin^2 \varphi_3 + \sigma^{33} \sin^2 \varphi_2, \\ \sigma^{LR} &= \sigma^{11} \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 (-\cos \varphi_1 \sin \varphi_3 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3) + \sigma^{22} \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_3 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3) - \\ &\quad + \sigma^{33} \sin \varphi_2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 - \sigma^{E2}, \\ \sigma^{LT} &= \sigma^{11} \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 (\sin \varphi_1 \sin \varphi_3 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3) + \sigma^{22} \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 (\sin \varphi_1 \cos \varphi_3 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3) + \\ &\quad + \sigma^{33} \sin \varphi_2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 = \sigma^{TL}, \\ \sigma^{E2} &= \sigma^{11} (\cos \varphi_1 \sin \varphi_3 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3)^2 + \sigma^{22} (\cos \varphi_1 \cos \varphi_3 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3)^2 + \\ &\quad + \sigma^{33} (\sin \varphi_2 \cos \varphi_2)^2, \\ \sigma^{ET} &= \sigma^{11} (\cos \varphi_1 \sin \varphi_3 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3) (\sin \varphi_1 \sin \varphi_3 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3) + \\ &\quad + \sigma^{22} (\cos \varphi_1 \cos \varphi_3 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3) (-\sin \varphi_1 \cos \varphi_3 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3) - \\ &\quad + \sigma^{33} \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 - \sigma^{TR}, \\ \sigma^{TT} &= \sigma^{11} (\sin \varphi_1 \sin \varphi_3 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3)^2 - \sigma^{33} (-\sin \varphi_1 \cos \varphi_3 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3)^2 + \\ &\quad + \sigma^{33} (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2)^2. \end{aligned} \quad [10]$$

A fenti hat feszültségkomponens adja meg a [3] mátrix elemeit.

Példaként vegyünk egy esetet, amelyben a létrehozott terhelő feszültségi tenzor komponensei:

$$\sigma^{11} = -100 \text{ MPa}, \sigma^{22} = -40 \text{ MPa}, \sigma^{33} = -35 \text{ MPa},$$

a próbatest orientálás az alábbi: $\varphi_1 = 30^\circ$, $\varphi_2 = 30^\circ$, $\varphi_3 = 25^\circ$. A [9] transzformációs mátrix:

$$\beta_i^{i'} = \begin{bmatrix} 0,785 & -0,593 & -0,181 \\ 0,366 & 0,679 & -0,636 \\ 0,500 & 0,433 & 0,750 \end{bmatrix}.$$

Végül a feszültségi tenzor mátrixa az anatómiai főirányok rendszerében:

$$\bar{\sigma}(L, R, T) = \begin{bmatrix} -75,71 & 28,99 & 10,41 \\ 28,99 & -60,13 & -4,82 \\ 10,41 & -4,82 & -39,16 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

² Itt és a továbbiakban is alkalmazzuk az Einstein-féle összegzési konvenciót.

Mint látjuk, ha célszerűen választjuk meg az orientációt, formálisan teljesen általános feszültségi állapotot lehet létrehozni a látszólag egyszerű és korlátozott igénybevételre alkalmas triaxiális berendezéssel.

Anizotrop tönkremeneteli elméletek

Anizotrop anyagokra, sőt kifejezetten faanyagra számtalan tönkremeneteli elméletet vezettek be. Ezek egy része korlátozott számú kísérleti eredményen alapuló tapasztalati formula, másik része elméletileg is megalapozott. Ez utóbbiak általánosabb érvényűek, elvileg minden feszültségi állapotban érvényesek. A tönkremeneteli elméletek a feszültségek hiperterében egy felületet adnak meg. Ez a felület lényegében egy határfelület. Amennyiben a feszültségi állapotnak megfelelő képpont rajta van a határfelületen, az anyag vizsgált pontja éppen tönkremeneteli határállapotban van. Ha a feszültségi képpont a felület belsejébe esik, nincs tönkremenetel, ha a felületen kívül van, az anyag tönkremegy (hasonlóan az izotrop anyagokra kidolgozott Mohr-féle elmélethez).

A szakirodalomban alapvetően három olyan, anizotrop anyagokra alkalmazható tönkremeneteli elmélet található, amelyek kielégítik azt a feltételt, hogy elméletileg, többé-kevésbé megalapozottak (tehát nem tapasztalati képletek). Széleskörű és alapos ellenőrzésük azonban mindegyik esetében hiányzik.

Az anizotrop anyagok tönkremeneteli kritériumaként ma a von Mises-, a Tsai-Wu- és az Askenazi-féle elméletek a legnépszerűbbek, ill. matematikailag és mechanikailag a legmegalapozottabbak.

A von Mises-féle tönkremeneteli elmélet:

$$\mathbf{f}_L \left[\mathbf{t}_{ijkl} \sigma^{ij} \sigma^{kl} \right] = \mathbf{f}_L \quad , \quad [11]$$

ahol

\mathbf{f}_L – az anyag húzószilárdsága az 1-es irányban,
 \mathbf{t}_{ijkl} – a von Mises-féle tönkremeneteli tenzor komponensei ($i, j, k, l = L, R, T$).

A Tsai-Wu-féle tönkremeneteli elmélet:

$$\mathbf{f}_L \left[\mathbf{t}_{ij} \sigma^{ij} + \mathbf{t}_{ijkl} \sigma^{ij} \sigma^{kl} \right] = \mathbf{f}_L \quad , \quad [12]$$

ahol

\mathbf{f}_L – az anyag húzószilárdsága az 1-es irányban,
 \mathbf{t}_{ij} – a Tsai-Wu-féle kétdimenziós szilárdsági tenzor ($i, j = L, R, T$),
 \mathbf{t}_{ijkl} – a Tsai-Wu-féle négydimenziós szilárdsági tenzor ($i, j, k, l = L, R, T$).

Az Askenazi-féle tönkremeneteli elmélet alakja:

$$\left[\mathbf{t}_{ijkl} \sigma^{ij} \sigma^{kl} \right] = \sqrt{I_1^2 - I_2} \quad , \quad [13]$$

ahol

$\sigma^{ij} = \sigma_{ij}$ – a ható feszültségi állapot,
 I_1 és I_2 – az első és második feszültségi invariáns,
 \mathbf{t}_{ijkl} – az Askenazi-féle szilárdsági tenzor,
 δ_{ij} – a Kronecker-delta.

A fenti kifejezések bal oldala minden esetben kiegészítő potenciál jellegű mennyiség. Az első két elmélet tehát azt mondja ki, hogy a tönkremenetelig felhalmozott kiegészítő potenciál a feszültségi állapottól vagy annak orientációjától független és az anyagra jellemző állandó. Ebben az esetben bizonyítható, hogy a rugalmas állandók és a szilárdságok között valamilyen függvénykapcsolatnak kell lennie. E kapcsolatok által előírt mennyiségi viszonyok azonban a gyakorlatban tapasztalt anyagjellemzőkre nem teljesülnek. Az Askenazi elméletben a kiegészítő potenciál nem állandó, hanem a ható feszültségi állapot invariánsainak függvénye. Az Askenazi elmélettel meghatározhatók a tönkremenetelhez tartozó feszültségállapotok, az alakváltozási jellemzők ismeretében pedig a különböző törési feszültségi állapotoknak megfelelő kiegészítő potenciál, vagy azok egymáshoz viszonyított aránya. Anizotrop szívós vagy rideg anyagokra ilyen módon elvileg csupán az Askenazi-féle törésmélet helyes. A három elmélet közül a von Mises és a Tsai-Wu másodfokú polinom. Mivel a felületnek fizikai jelentésénél fogva nem lehet végtelen távoli pontja (a szilárdság semmilyen irányban nem lehet végtelen nagy), ezek csak hiperellipszoidok lehetnek. Az Askenazi felület negyedfokú polinom, így sokkal tagoltabb lehet, mint az ellipszoid felületek. Helyesen meghatározott technikai szilárdságok mellett a felület dombszerű ugyan, de kívülről nézve konkáv részeket is tartalmazhat. A tönkremeneteli határfelületen tapasztalható homorú felületrészek megjelenésének lehetőségét rideg anyagok esetén Szalai. elméletileg is igazolta (1999).

A három elméletben szereplő tenzorkomponensek definíciója nem azonos. Ezek azonban a technikai szilárdságoknak (éppen az elmélet alapján) meghatározott függvényei. Érdekes módon mindhárom elméletben ugyanazokat a technikai szilárdságokat kell ismerni a tenzorkomponensek számításához. Egy adott fafaj esetén a technikai szilárdságok száma 27. Némi kompromisszummal ez a szám 15-re csökkenthető, oly módon, hogy 12 technikai szilárdságot (az anatómiai főirányokhoz és az anatómiai fősíkok szögfelezőinek

irányához tartozó húzó- és nyomószilárdságokat) mérünk, hármat (az anatómiai fősíkokhoz tartozó nyírószilárdságokat) pedig egy közelítő eljárással az előző mérési adatokból számítunk.

Az elméletek helyességének megítélése

Az elméletek ellenőrzésének kézenfekvő és igen szemléletes lehetősége az, hogy a kísérlettel megállapított tönkremenetelnek megfelelő feszültségi állapotoknak megfelelő képpontok helyét felvesszük a feszültségek hiperterében. Az a tönkremeneteli elmélet tekinthető a legalkalmasabbnak, amelyiknek megfelelő határfelülethez a feszültségi képpontok a legközelebb esnek. A probléma az, hogy sem a képpontokat, sem a határfelületet hat dimenziós térben (ennyi a független feszültségkomponensek száma) nem tudjuk ábrázolni, bár néhány statisztikai mennyiséget tudunk számítani (pl. korreláció). Ez az eljárás alkalmazható akkor, ha a feszültségi állapot síkbeli. Ilyenkor három független feszültségkomponensünk van, a felület tehát a három dimenziós térben jól ábrázolható. Síkbeli feszültségi állapot esetén azonban éppen az ellenőrző vizsgálat általánossága kerül veszélybe, arról nem is beszélve, hogy csupán egy vizuális benyomás nem elegendő a közel egybeesés megítéléséhez.

Az objektív megítélés érdekében két eljárást alkalmazhatunk. Az egyik azon alapszik, hogy az Askenazi féle tönkremeneteli elmélet is átalakítható a [11], [12] elméletek matematikai alakjának megfelelő formára:

$$\frac{[L_{ijkl} \sigma^j \sigma^{k,l}]}{\sqrt{I_1^2 - I_2}} = 1 \quad [14]$$

A (8), (9) és (11) kifejezéseket a következőképpen értelmezhetjük. Ha az egyenletek bal oldalát a tényleges tönkretevő feszültségkomponensekkel kiszámítva – a továbbiakban ezt az értéket n -nel jelöljük – éppen egyet kapunk, az azt jelenti, hogy a feszültségi képpont éppen a tönkremeneteli felületre esik. $n < 1$ esetén a feszültségi képpont a határfelület belsejébe, $n > 1$ esetén a határfelületen kívülre esik. Tehát, ha a tönkremenetelhez tartozó feszültségi állapotot helyettesítjük be, elvileg $n = 1$ -et kell kapnunk. A faanyag tulajdonságainak (így a szilárdságnak is) természetes szóródása miatt, esetleg egyéb mérési hibák miatt n valószínűségi változó. Az n -ek összességének mint mérési adathalmaznak a statisztikai kiértékelésével, a három minta statisztikai jellemzőinek összehasonlításával a legjobb az egyes elméletek kiválasztható.

A kiértékelés másik formája úgy történhet, hogy egy olyan statisztikai mennyiséget képezünk, amely valamilyen formában kimutatja a tönkremenetelhez tartozó képpontnak a szilárdsági felülettől való távolságát (annak abszolút értékét vagy négyzetét) és ezeket összegzi. Minél kisebb ez a jellemző, annál jobban megközelítik a kísérleti eredmények a tönkremeneteli hipotézist. Ennek a statisztikai jellemzőnek a kimunkálása további kutatásokat igényel.

Várható eredmények

Vizsgálatainkat több fafajon kívánjuk elvégezni. Természetesen csak azok a fajok jöhetnek szóba, amelyeknek ismerjük a technikai szilárdságait, mégpedig a minimális, 15 elemből álló együttest. Ilyen rendszerszemléletű vizsgálatokat eddig csak a Nyugat-Magyarországi Egyetem Műszaki Mechanika és Tartószerkezetek Intézetében végeztek. Ott mintegy 10 fafajnak a technikai szilárdságait határozták meg szilárdságfajtánként 300 elemes sorozatokon.

A kísérletek eredményeként azt várjuk, hogy végre végérvényesen eldönthető lesz az a kérdés, hogy melyik az a tönkremeneteli elmélet, mely a természetes faanyagra a leghatékonyabban használható. A természetes faanyagon végzett vizsgálatok eredményei egyéb anizotrop anyagok tönkremenetelével kapcsolatos tudományos vélekedéseket is megváltoztathatnak.

Köszönetnyilvánítás

A kutatást a T34107 sz. program keretében az OTKA támogatja.

Irodalomjegyzék

- Askenazi, E.K. 1966: *Procsnoszt' anizotropnüh drevesznüh i szinteticseszkih materialov*. 1. kiadás. Moszkva: Izdatelstvo Lesznaja Promüslennoszt.
- Askenazi, E.K. 1967: *K voproszu o geometrii teorii procsnoszti*. *Mechanika Polimerov*, No.4. Riga. 703-707.
- Corvin, S.C. 1979: *On the Strength Anisotropy of Bone and Wood*. Department of Biomedical Engineering, Tulane University, New Orleans, LA. 70118.
- Eberhardsteiner, J. 2002: *Mechanisches Verhalten von Fichtenholz (Experimentelle Bestimmung der biaxialen Festigkeitseigenschaften)*. Springer Wien New York. 174 old.
- Norris: Ch.B. 1962: *Strength of orthotropic materials subjected to combined stresses*. Forest Product Laboratory, No. 1816.
- Szalai, J. 1992: *Comparing of Failure Theories for Orthotropic Materials on the Basis of Theoretical Criteria of their Applicability*. *Acta Facultatis Ligniensis*. Sopron. EFE. 1992/1. 15-32.

Szalai, J. 1992: *Indirekte Bestimmung der Scherfestigkeit des Holzes mit Hilfe der anisotropen Festigkeitstheorie.* Holz als Roh- und Werkstoff 50: 233-238.

Szalai, J. 1994: A faanyag és faalapú anyagok anizotrop rugalmasság- és szilárdságtana. I. rész: A mechanikai tulajdonságok anizotrópiája. Hillebrand Nyomda KFT. Sopron. 398 old.

Szalai, J. 1994: A természetes faanyag és faalapú anyagok szilárdsági viselkedésének jellemzői, tönkremeneteli feltételének megfogalmazása. Közlekedésépítés- és Mélyépítéstudományi szemle. XLIV. 44(4):123-130.

Szalai, J. 1994: A faanyag és faalapú anyagok erőtani méretezése összetett feszültségi állapot esetén. Építés-, Építéstudomány. 26(3-4): 215-223.

Szalai, J. 1994: A természetes faanyag és faalapú anyagok nyírószilárdságának anizotróp szilárdsági kritériumon alapuló közvetett meghatározása. Közlekedésépítés- és Mélyépítés-tudományi szemle. 44(7): 275-282.

Szalai, J. 1996: Az erdei fenyő (*Pinus silvestris*) technikai szilárdságai. Bútor- és Faipar.

Szalai, J. 1997: *Technische Festigkeiten des Buchenholzes (Fagus sylvatica).* Drevársky Vyskum. 42(3): 1-14.

Szalai, J. 1998: *Technische Festigkeiten der Akazie (Robinia pseudo-Acacia) und der Fichte (Picea excelsa).* Drevársky Vyskum. 43. (3-4) 39-51.

Szalai, J. 1999: A természetes faanyag tönkremeneteli kritériumok által meghatározott szilárdsági felületének általános jellemzői. Faipar. XLVII. 47(2-3) 15-17.

Szalai, J. 1999: *Technische Festigkeiten der Eiche (Quercus Robur).* A Soproni Egyetem Tudományos Közleményei. 1996 – 1999. 42-45. évfolyam. 189-198.

Szalai, J. 2001: Faszerkezetek méretezését és gyártását befolyásoló sajátosságok. In: Wittmann Gy. szerk. *Mérnöki faszerkezetek.* II. 143 - 259. Mezőgazdasági Szaktudás Kiadó. Budapest.

Tsai, S.W.-Wu, E.M. (1971): *A general theory of strength for anisotropic material.* J. Composite Materials, 5: 58-80.