

## A LUCFENYŐ DINAMIKUS RUGALMASSÁGI MODULUSZA ALACSONY FREKVENCIÁN

JOÓ BALÁZS

A teherviselő faszerkezetek tervezésekor előforduló legfontosabb anyagjellemző paraméter a rugalmassági modulusz. Ennek méréséről a legújabb európai előírások is rendelkeznek. Egy összetett mérésorozat első állomásaként vizsgáltuk ezen anyagjellemző terhelési sebességtől való függését. A dinamikus rugalmassági modulusz frekvenciafüggését alacsony frekvenciatartományban állapítottuk meg, valamint meghatároztuk az ezzel szoros kapcsolatban álló kúszásfüggvényt rövid vizsgálati idő mellett.

**Kulcsszavak:** Faszerkezetek, Dinamikus rugalmassági modulusz, Kúszásfüggvény

## DINAMIC MODULUS OF SPRUCE-FIR ON LOW FREQUENCY RANGE

In case of designing a timber structure the most important material property is the elastic modulus. Also, the newest European Standard (EUROCODE) gives instructions on its measuring. As a first station of a complex testing series we studied the frequency dependence of the elastic modulus by low-speed loading. We defined the frequency dependence of the dynamic modulus in a low frequency range, and determined the creep function of spruce-fir that is in tight connection with the dynamic modulus.

**Keyword:** Timber construction, Dynamic modulus of elasticity, Creep curve

## Bevezetés

A teherviselő faszerkezetek tervezésekor előforduló legfontosabb anyagjellemző a rugalmassági modulusz. Ennek méréséről a legújabb európai előírások is rendelkeznek (MSZ EN 408). Egy összetett mérésorozat első állomásaként vizsgáltuk ezen anyagjellemző terhelési sebességtől, azaz az időtől való függését. A faszerkezetek élettartama során előforduló terheket figyelembe véve megállapítható, hogy a faanyag időfüggő anyagjellemzőinek figyelembevétele indokolt. A dinamikus rugalmassági modulusz frekvenciafüggését alacsony frekvenciatartományban állapítottuk meg, valamint meghatároztuk az ezzel szoros kapcsolatban álló kúszásfüggvényt rövid vizsgálati idő mellett. Ez egyben a faanyag időfüggő tulajdonságainak egy megjelenési formája.

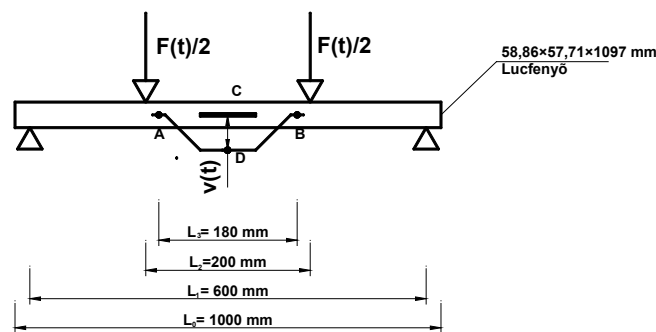
## A mérés kivitelezése

A vizsgálat faanyag lucfenyő (*Picea abies*), mérete 58,86×57,71×1097 mm. Nedvességtartalma, az ellenőrzöttlaboratóriumi körülmények között tárolva, közelítőleg 8-12%. A faanyag nedves sűrűsége: 475 kg/m<sup>3</sup>. A mérést az 1. ábrán látható elrendezésben valósítottuk meg.

Az időben változó  $F(t)$  erő hatására mértük a tartó semleges szálának relatív elmozdulását. A semleges szál A és B pontjához rögzítjük az alumínium trapézlemezt. A semleges szál C pontjának mozgását a tra-

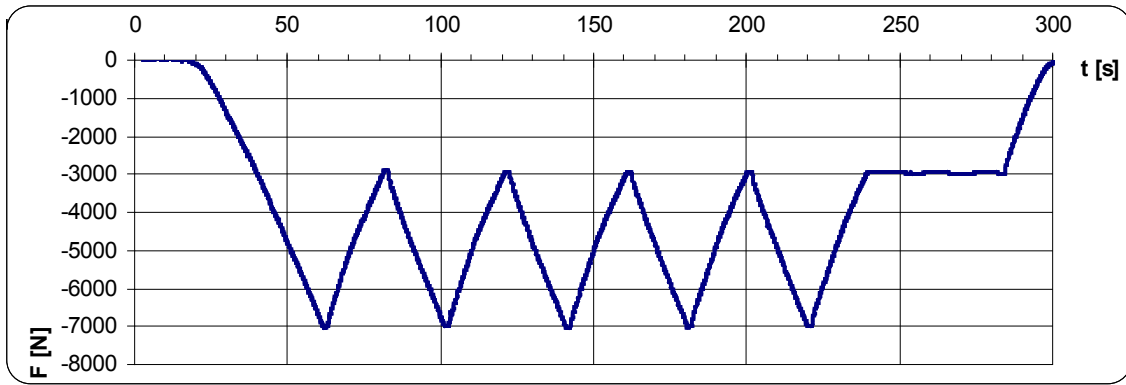
pézlemez D pontjához képest vettük fel. Tehát az A és B pontokhoz képest vettük fel a C pont  $u(t)$  elmozdulását. Finomnyúlás-mérővel meghatároztuk az alakváltozást. A mérés során digitális jelfeldolgozás segítségével rögzítettük az adatokat. A mintavételezés gyakoriság előre beállított érték 0.12 s volt. Egy azon időpillanatban rögzítettük az erőmérő cellából és a finomnyúlás-mérőből jövő jeleket a fenti mintavételezési gyakoriságnak megfelelően.

A vizsgálat során négy különböző alapfrekvenciájú, de azonos alakú  $F(t)$  periodikus erővel terheltük a próbatestet. A 2. ábra a négy fajta vizsgálat közül a 39,9 másodperc periódusú terhelés időbeni lefutását mutatja be.



1. ábra Mérési modell

\*Joó Balázs egy. tanársegéd, NyME Matematika Intézet



2. ábra Terhelő erő – idő diagram; /  $F[N] - t[s]$ /, periódusidő:  $T = 39,90$  s

A vizsgált alapfrekvenciák:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 0,157 \text{ Hz} & \omega_2 &= 0,259 \text{ Hz} \\ \omega_3 &= 0,487 \text{ Hz} & \omega_4 &= 0,0796 \text{ Hz} \end{aligned}$$

**A mérés kiértékelésének elméleti háttere**

**I) A rugalmas megoldás**

Az 1. ábra szerinti terhelés esetén az  $F$  erő hatására létrejövő lehajlás virtuális munkatételével számítható. Az  $A$  és  $B$  ponthoz képest a  $C$  pont elmozdulása csak a nyomatéki alakváltozásból származik (ezen a szakaszon nincs nyíróerő):

$$v = \frac{F(L_1 - L_2)L_3^2}{32EI} = \frac{F(600 - 200)180^2}{32 \cdot E_0 \cdot \frac{57,71 \cdot 58,86^3}{12}} = 0,4130 \cdot \frac{F}{E_0}$$

, tehát  $v = 0,4130 \cdot \frac{F}{E_0}$

ahol  $E_0$  – a rugalmassági modulusz  
 $F$  – a terhelő erő  
 $v$  – az elmozdulás.

**II) A viszkoelasztikus rendszer válasza**

Az 1.) összefüggésből számítható rugalmas megoldáson túl, egy, az időtől függő tag is megjelenik. A viszkoelasztikus anyagok anyagörvényét már többen alkalmazták műanyagokon kívül faanyagra is. (Fodor 1962, Fodor 2002, 2003, Sitkei 1994)

$$\kappa(t) = Y(t=0) \cdot \frac{M(t)}{I} - \int_0^t \frac{\partial Y(t-\tau)}{\partial \tau} \cdot \frac{M(\tau)}{I} d\tau, \quad [2]$$

ahol  $Y(t)$  – az anyag lineárisan viszkoelasztikus kúszásfüggvénye, amely a rendszer egység ugrás terhelésre adott válasza (a lineáris rendszer átmeneti függvénye)

$M(t)$  – terhelési történet, a hajlítói igénybevétel időfüggvénye,

$I$  – másodrendű keresztmetszeti nyomaték a hajlítás tengelyére,

$\kappa(t)$  – a görbület időfüggvénye, mely a lehajlásból és a geometriából számítható.

A görbület az alakváltozás geometriájából, a hajlítóigénybevétel a terhelésből számítható:

$$\frac{8v_c(t)}{L_3^2} = Y(t=0) \cdot \frac{F(t)(L_1 - L_2)}{4I} - \int_0^t \frac{\partial Y(t-\tau)}{\partial \tau} \cdot \frac{F(\tau)(L_1 - L_2)}{4I} d\tau$$

$v_c(t)$ -re rendezve a következőt kapjuk:

$$v_c(t) = \frac{1}{F_0} \cdot F(t) \left( \frac{(L_1 - L_2)L_3^2}{32I} \right) - \int_0^t \frac{\partial Y(t-\tau)}{\partial \tau} \cdot F(\tau) \cdot \left( \frac{(L_1 - L_2)L_3^2}{32I} \right) d\tau$$

Ebből  $\left( \frac{(L_1 - L_2)L_3^2}{32I} \right)$  állandó, értéke: 0,4130. A [2] egyenlet végső alakja tehát:

$$v_c(t) = 0,413 \frac{F(t)}{E_0} - 0,413 \cdot \int_0^t \frac{\partial Y(t-\tau)}{\partial \tau} \cdot F(\tau) d\tau \quad [3]$$

A mérés során az  $Y(t)$  anyagjellemző kúszásfüggvényt keressük. Ezt a függvényt exponenciális függvények összegeként tudjuk felírni, a következő általános formában:

$$Y(t) = A - \sum_{i=1}^n B_i \cdot e^{-\frac{t}{c_i}} \quad [4]$$

A [4] formában megadott függvény típusát az általánosított Voigt-Kelvin modell megoldása indokolja, valamint az, hogy szigorúan növekvő korlátos függvényről van szó. (Pritz 1996)

A rövid idejű méréshez igazodva és számítástechnikailag egyszerűsítve a kúszásfüggvényben csak egy exponenciális tagot hagyunk meg. Emellett a három konstans közül ( $A, B, C$ ) egy meghatározható,

mivel  $Y(t=0)=1/E_0$ . Így a keresett függvény az 5.) összefüggés szerinti, ahol  $E_0$ ,  $B$ ,  $C$  értékeket kell meghatározni:

$$Y(t) = \frac{1}{E_0} + B \left( 1 - e^{-\frac{t}{C}} \right) \quad [5]$$

$E_0$  meghatározása a mérés kezdeti szakaszán a hagyományos módon történik. A lineárisan növekvő erőhöz tartozó lineárisan növekvő elmozdulást egy grafikonba rendezve kapjuk az erő-elmozdulás diagrammot. A rugalmassági moduluszt az egyenes meredeksége adja, [1] -ből:

$$E_0 = 0,413 \cdot \frac{\Delta F}{\Delta v}$$

A  $B$  és  $C$  konstansok a legkisebb négyzetek elvén alkalmazásával számítható. A [2] egyenlet alapján kiszámítjuk az ismeretlen  $B$  és  $C$  paraméterek segítségével az elméleti  $\kappa_e(t)$  függvényt (amely nyilván ezen  $B$  és  $C$  paraméterek függvénye is lesz), majd vesszük a tényleges függvényértékektől (mért elmozdulástól) vett eltérések négyzetösszegét:

$$f(B,C) = \sum_{i=1}^N (\kappa_e(t_i, B, C) - \kappa_m(t_i))^2$$

Ennek a függvénynek a minimumát keressük meg egy szélsőérték számítási feladaton belül.

**A számítás algoritmus:**

A [5] egyenletből kiindulva:

$$v_e(t) = 0,413 \frac{F(t)}{E_0} - 0,413 \cdot \int_0^t \frac{\partial Y(t-\tau)}{\partial \tau} \cdot F(\tau) d\tau.$$

A magfüggvénybe [5]-öt behelyettesítve,

$$\frac{\partial Y(t-\tau)}{\partial \tau} = -\frac{B}{C} e^{-\frac{t-\tau}{C}},$$

majd az ismeretleneket  $x = \frac{B}{C}$ ,  $y = e^{-\frac{1}{C}}$  helyettesítve kapjuk:

$$v_e(t) = 0,413 \frac{F(t)}{E_0} + 0,413 \cdot \int_0^t x \cdot y^{t-\tau} \cdot F(\tau) d\tau.$$

Diszkrét értékekre az egyenlet alakja:

$$v_e(t_i) = 0,413 \frac{F(t_i)}{E_0} + 0,413 \cdot x \cdot y^{t_i} \cdot \int_0^{t_i} \frac{F(\tau)}{y^\tau} d\tau$$

,  $i \in [1, N]$ , ahol  $N$  a mérési pontok száma.

Az integrálást trapézformulával számítva kapjuk a négy aritmetikai művelet segítségével az elmozdulás és a terhelő erő közötti összefüggéseket:

$$v_e(t_i) = 0,413 \frac{F(t_i)}{E_0} \quad i=1, \text{ és}$$

$$v_e(t_i) = \left[ 0,413 \frac{F(t_i)}{E_0} \right] + \left[ 0,413 \cdot x \cdot y^{t_i} \cdot \sum_{j=2}^i \left( \frac{F(t_j)}{y^{t_j}} + \frac{F(t_{j-1})}{y^{t_{j-1}}} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot (t_j - t_{j-1}) \right] \quad 2 \leq i \leq n.$$

Képezzük az elméleti és a mért értékek eltéréseinek a négyzetösszegét:

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^N (v_e(t_i) - v_m(t_i))^2$$

A függvény szélsőértékének meghatározása a parciális deriváltak zérushelye alapján történik.  $x$  és  $y$  segédváltozók értékéből pedig  $B$  és  $C$  értékei egyértelműen számítható.

A mérési pontok számának ( $N$ ) növekedésével az  $f(x, y)$  függvény tagjai négyzetesen növekednek, amely jelentősen megnöveli a kiértékelési műveletek idejét. A továbbiakban az egyes mérési pontok törlésével a teljes mérési intervallumban 100 pontot vettünk fel az alakváltozásból, és a terhelésből is.

A meghatározottsági együttható, amely az illesztés jóságát mutatja a következőképpen számítható:

$$R^2 = \frac{SS_T - SS_M}{SS_T} = 1 - \frac{SS_M}{SS_T} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (v_e(t_i) - v_m(t_i))^2}{\sum_{i=1}^N (v_m(t_i) - \bar{v}_m)^2};$$

$$\left( R^2 = 1 - \frac{f(x_0, y_0)}{\sum_{i=1}^N (v_m(t_i) - \bar{v}_m)^2} \right)$$

ahol  $\bar{v}_m$  a mért elmozdulások átlaga.

**Eredmények**

A fenti vizsgálati körülmények mellett, a rugalmassági határ alatt mértük az 1.ábra szerinti elrendezésben az erőhöz tartozó elmozdulást. Így kapjuk a statikus rugalmassági moduluszt, valamint ugyanilyen módon a dinamikus rugalmassági moduluszt. Ez utóbbi ebben az értelmezésben nem más, mint a változó sebesség mellett megállapított statikus modulusz:

$$E_0 = 0,413 \cdot \frac{\Delta F}{\Delta v_0} = 0,413 \cdot 34032 = 14055 \frac{N}{m^2}$$

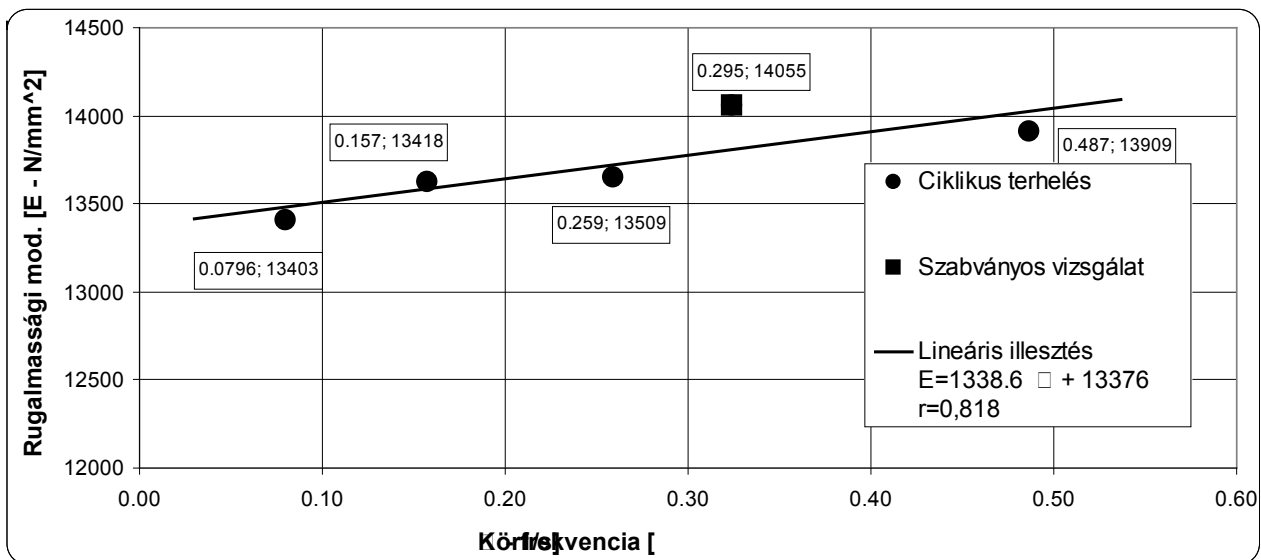
$$E_{din} = 0,413 \cdot \frac{\Delta F}{\Delta v_0} \left[ \frac{N}{m^2} \right]$$

Az egyes terhelési esetekben a fenti algoritmussal kapott kúszásfüggvény paramétereit az 1. táblázat tartalmazza:

1. táblázat Az egyes méréshez tartozó mérési eredmények

Sorszám	4.	1.	2.	3.
	0,0796 Hz	0,157 Hz	0,259 Hz	0,487 Hz
$E_{din}$ [N/mm <sup>2</sup> ]	13403	13619	13645*	13909
$B$ [mm <sup>2</sup> /N]	$1,148 \times 10^{-6}$	$2,726 \times 10^{-8}$	-	$0,431 \times 10^{-6}$
$C$ [s]	27,31	12,15	-	7,75
$R^2$ [-]	0,9999	0,9999	-	0,9942
$E_0$ [N/mm <sup>2</sup> ]	14055	14055	14055N	14055
$B$ [mm <sup>2</sup> /N]	$4,916 \times 10^{-6}$	$2,361 \times 10^{-6}$	$5,382 \times 10^{-6}$	$1,188 \times 10^{-6}$
$C$ [s]	16,28	9,60	6,72	5,42
$R^2$ [-]	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

\* A számítási algoritmusban a rugalmas rész önmagában is szélsőértéket jelentett.



3. ábra A mért rugalmassági modulusok a frekvencia függvényében

### Az eredmények értékelése

A különböző terhelési sebességek mellett mért rugalmassági modulusokat együtt ábrázolva kapjuk a 3. ábra szerinti pontsorozatot. A mérés során megerősíthetjük azt a több szerző (Dívós és Tanaka 2000, Pritz 1996) által megfogalmazott tényt, hogy a rugalmassági modulus a frekvencia növekedésével nő.

Az ábráról az is leolvasható, hogy az előírás szerinti rugalmassági modulusnál kisebb rugalmassági modulus is mérhető, kisebb terhelési sebességek mellett. A további adatfeldolgozás előtt meg kell állapítani, hogy a kúszásfüggvények meghatározásakor az anyag-egyenletben feltételezett  $Y(t=0)=1/E_0$  egyenlőség csak egy fiktív  $E_0$  rugalmassági modulusra érvényes. Minden mérés az időben történik, így a lineárisan viszkoelasztikus viselkedésű faanyag rugalmassági modulusának mérésekor az adott frekvenciának megfelelő értéket kapunk.

A megállapított kúszásfüggvények (4. ábra) csak egy rövid időtávon belül írja le az anyag lineárisan viszkoelasztikus viselkedését. Ez összhangban van azzal, hogy az exponenciális függvénysornak csak egy tagját tartottuk meg. A mérési időn belül viszont az így megállapított anyag törvény közel 100%-os hatékonysággal alkalmas az időben változó terhelésre adott válasz számítására. Ezek alapján kiemelkedő jelentősége van a kis frekvencián és hosszú ideig végzett vizsgálatoknak, hiszen ez hosszabb távú előrejelzést tesz lehetővé. Az ott megállapított kúszásfüggvény az 1. táblázat adatai alapján:

$$Y(t) = \frac{1}{13403} + 1,148 \cdot 10^{-6} \left( 1 - e^{-\frac{t}{27,31}} \right)$$