SZAKTÁRGYAK

Mészáros Jenő: **Függvények approximációja racionális algebrai törtekkel**

A. Bevezetés

Az eddigi cikkekben egyenletek gyökeinek tetszőleges pontossággal való meghatározásával foglalkoztunk, most pedig függvényeket szándékozunk átalakítani tetszőleges pontossággal közelítő más alakra.

Ismeretes az $f(x)$ függvény:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

Taylor sorának az a tulajdonsága, hogy a tagok számának növelésével tetszőleges pontossággal megközelíthető vele az adott $f(x)$ függvény bizonyos feltételek mellett.

Célunk az $f(x)$ függvényeket

$$\frac{a_0}{b_0},\ \frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x},\ \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2},\ \dots$$

racionális törtfüggvény alakban előállítani. Itt a számláló és nevező tagszámainak növelésével tetszőleges pontossággal tudjuk az $f(x)$ fügvényt megközelíteni. Nem szükséges, hogy a számláló és nevező ugyanannyi tagból álljon, magától a függvénytől függ a legjobban közelítő alak.

Az $f(x) \approx \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m} = \frac{A_n(x)}{B_m(x)}$ racionális törtfüggvények tulajdonságai nem mindig azonosak a Taylor sorból képzett sorozatokéival:

Lehetséges, hogy a Taylor sor x=1-nél divergens, ugyanakkor az $\frac{A_r(x)}{B_r(x)}$ sorozatának van határértéke x=1 esetében.

Elemi függvényeket sokkal pontosabban közelíthetünk racionális törtfüggvényekkel, mint Taylor sorral, ha ugyanannyi differenciálhányados áll rendelkezésünkre.

A racionális törtfüggvény szoros kapcsolatban van a lánctörtekkel, melyek legjobban közelítenek meg törtértékeket.

Sok feladat sikeresebben oldható meg ezzel az alakkal.

Példaként nézzük a későbbiekben kiszámított $\ln(1+x)$ függvénysorozatát: $\ln(1+x) \approx \frac{6x+x^2}{6+4x} \approx \frac{6x+3x^2}{6+6x+x^2} \approx \frac{30x+21x^2+x^3}{30+36x+9x^2}$

0,40547	$=\ln(1+0{,}5) \approx$	0,40625	0,40540	0,40547
0,6931	$=\ln(1+1) \approx$	0,7000	0,6923	0,6933
1,099	$=\ln(1+2) \approx$	1,143	1,091	1,101
1,386	$=\ln(1+3) \approx$	1,500	1,364	1,397

A harmadik tört ln számításánál egyenértékű a Taylor sor első 15 tagjával, ln 2-nél a Taylor sorból legalább 1342 tagot kell venni, ln 3-ra és ln 4-re pedig a Taylor sor divergens. A hiba növekszik, ha x növekszik, de csökken, ha a tagok száma nő a számlálóban és nevezőben.

B. Függvénysorozatok előállítása

a. Előállítás lánctörtekkel

A következőkben csak hivatkozom a lánctörtek tulajdonságaira és a sorozat képzésére, a bizonyítások megfelelő könyvekben megtalálhatók.

Ha $f(x) \approx \frac{A(x)}{B(x)}$ és a különbséget első közelítésben ki tudjuk számitani, akkor alkalmazható az eljárás. Ez az eset pl. a gyökvonásnál. Számítsuk ki $f(x) = \sqrt{1+x}$ értékét lánctörtekkel. Feltételezzük, hogy $|x| \ll 1$ és a majd kapott képletek annál pontosabb eredményt adnak, minél közelebb van x a 0-hoz, vagy pedig minél több tagból áll a számláló és a nevező.

$$\sqrt{1+x} \approx \underline{\underline{1}}$$

$$\sqrt{1+x} - 1 = \varepsilon < 1 \longrightarrow \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{1+x}-1} = \frac{\sqrt{1+x}+1}{x} \approx \frac{2}{\underline{\underline{x}}}$$ első nevező

$$\frac{\sqrt{1+x}+1}{x} - \frac{2}{x} = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \longrightarrow \frac{x}{\sqrt{1+x}-1} = \frac{(\sqrt{1+x}+1)x}{x} \approx \underline{\underline{2}}$$ második nevező

$$\sqrt{1+x}+1-2 = \sqrt{1+x}-1 \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x}-1} = \frac{\sqrt{1+x}+1}{x} \approx \frac{2}{\underline{\underline{x}}}$$ harmadik nevező

Az értékek ismétlődnek, mert a harmadik nevező után ugyanaz a számítás jön, mint az első nevező után. Legyen $\frac{1}{x} = n$ és képezzük a következő törteket:

1	$2n$	2	$2n$	2	$2n$	2
$\frac{1}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2n+1}{2n}$	$\frac{4n+3}{4n+1}$	$\frac{8n^2+8n+1}{8n^2+4n}$	$\frac{16n^2+20n+5}{16n^2+12n+1}$	...

Bármely tört számlálóját /nevezőjét/ megkapjuk, ha az előtte lévő számlálót /nevezőt/ megszorozzuk a felette lévő számmal és hozzáadjuk az ez előtti számlálót /nevezőt/. Pl.

$$16n^2+20n+5 = (8n^2+8n+1)\cdot 2 + (4n+3)$$

A törtek a lehető legjobban közelítenek.

Nézzük a $\sqrt{1+\frac{1}{n}} \approx \frac{16n^2+20n+5}{16n^2+12n+1} = \frac{16+20x+5x^2}{16+12x+x^2} = \sqrt{1+x}$

képletet $\sqrt{2} \approx \frac{41}{29} \to 2 \approx \frac{1681}{841} = 2 - \frac{1}{841}$

$$\sqrt{1,5} \approx \frac{109}{89} \to 1,5 \approx \frac{11881}{7921} = 1,5 - \frac{0,5}{7921}$$

$\sqrt{1+x} = \frac{A_n(x)}{B_m(x)}$ -nél a hiba nagysága: $\varepsilon < \frac{x^{m+n+1}}{2AB}$

Pl. $\sqrt{1+0,3} \approx \frac{16+20\cdot 0,3+5\cdot 0,09}{16+12\cdot 0,3+0,09} = \frac{22,45}{19,69} = 1,14017$, mert

$$\varepsilon \approx \frac{0,3^5}{2\cdot 22,45\cdot 19,69} = 0,0000027.$$

Hasonló eljárással kaphatjuk:

$$\sqrt[3]{1+x} = \frac{3+2x}{3+x} \approx \frac{27+24x+2x^2}{27+15x} \approx \frac{54+63x+14x^2}{54+45x+5x^2}$$

b. Előállítás Taylor sorból

Az eljárást egy példán nézzük meg. Keressük sin x egyik közelítőtörtjét, melynek alakja legyen

$$\sin x \approx \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3}$$

Könnyíthetünk a dolgunkon, ha figyelembe vesszük, hogy sin x páratlan függvény és ezért $f(x) = -f(-x)$ alapján írhatjuk

$$\sin x \approx \frac{a_1 x + a_3 x^3}{b_0 + b_2 x^2}$$

mert pl. a számlálóra

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \equiv -(a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3)$$

és az együtthatók összehasonlításából következik, hogy

$$a_0 = a_2 = 0$$

kell, hogy legyen.

$\sin x$ Taylor sorát ismerve

$$\frac{a_1 x + a_3 x^3}{b_0 + b_2 x^2} \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$$

Ebből $$a_1 x + a_3 x^3 \approx (b_0 + b_2 x^2)\cdot\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots\right)$$

Végezzük el a szorzást:

$$a_1 x + a_3 x^3 + 0\cdot x^5 \approx b_0 x + \left(b_2 - \frac{b_0}{6}\right)x^3 + \left(\frac{b_0}{120} - \frac{b_2}{6}\right)x^5 + \dots$$

Most x azonos hatványainak együtthatóit egyenlővé tesszük és a szükséges számú egyenletet felírjuk:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= b_0 \\ a_3 &= b_2 - \frac{b_0}{6} \\ 0 &= \frac{b_0}{120} - \frac{b_2}{6} \end{aligned}\right\}$$

Látszólag 4 ismeretlenünk van, de a törtet egyszerűsíthetjük ugy, hogy pl. b_0-t tetszőlegesen 1-nek választjuk. Ez alapján megoldva az egyenlőséget, kapjuk:

$$b_0 = 1 \qquad a_1 = 1$$
$$b_2 = \frac{1}{20} \qquad a_3 = \frac{7}{60}$$

Felírhatjuk eredményünket: $\dfrac{A(x)}{B(x)} = \dfrac{x - \frac{7}{60}x^3}{1 + \frac{1}{20}x^2} = \boxed{\dfrac{60x - 7x^3}{60 + 3x^2} \approx \sin x}$

Ez a képlet sin x értékét $0 \leq x \leq 0{,}8$ illetve

$0 \leq x \leq 46^\circ$ esetben a négyjegyű logaritmustábla pontosságával

adja meg, viszont $0 \leq x \leq 6{,}3^\circ$ esetében tiz tizedesjegy pontossággal.

A hiba nagyságrendje $\varepsilon \approx \frac{x^7}{5000}$, amit a régebben leírt eljárással számíthatunk.

Ilyen módon kaphatjuk a

$$\cos x \approx \frac{12 - 5x^2}{12 + x^2}$$

és

$$\operatorname{tg} x \approx \frac{15x - x^3}{15 - 6x^2}$$

képleteket.

C. Előállítás differenciálhányadosokkal

Vizsgáljuk általánosan az

$$f(x) \approx \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k}{b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m}$$

függvényt.

Szorozzunk, és a kapott egyenletet deriváljuk egymás után:

$$f \cdot B \approx A$$
$$f'B + fB' \approx A'$$
$$f''B + 2f'B' + fB'' \approx A''$$

$$f^{(n)}B + \binom{n}{1} f^{(n-1)}B' + \binom{n}{2} f^{(n-2)}B'' + \dots + fB^{(n)} \approx A^{(n)}$$

$A(x)$ és $B(x)$ meghatározása miatt:

$$
\begin{array}{ll|ll}
A = & a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots & B = & b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots \\
A' = & a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots & B' = & b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^3 + \dots \\
A'' = & 2a_2 + 6a_3 x + \dots & B'' = & 2b_2 + 6b_3 x + \dots \\
A''' = & 6a_3 + \dots & B''' = & 6b_3 + \dots
\end{array}
$$

Az $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ kifejezés $x = 0$ esetben pontosan egyenlő $f(0)$ -val,

Ezért az előbbi egyenletekbe $x = 0$-t helyettesítve kapjuk:

$$
\begin{array}{lcl}
A(0) = a_0 & & B(0) = b_0 \\
A'(0) = a_1 & \text{és} & B'(0) = b_1 \\
A''(0) = 2a_2 & & B''(0) = 2b_2 \\
\text{------------} & & \text{------------} \\
A^{(n)}(0) = n!\, a_n & & B^{(m)}(0) = m!\, b_m
\end{array}
$$

Számítsuk ki még az $f(x)$ függvény deriváltjait, helyettesítsünk $x = 0$ -t; ismert törtszámokat kapunk. Ha beírjuk a fenti differenciál egyenletekbe az $A^{(k)}(0)$, $B^{(k)}(0)$ és $f^{(k)}(0)$ értékeket, akkor egy lineáris egyenletrendszert kapunk, amiből a_i és b_j ismeretleneket kiszámíthatjuk.

$$f\, b_0 = a_0$$
$$f' b_0 + f b_1 = a_1$$
$$f'' b_0 + 2 f' b_1 + 2 f b_2 = 2 a_2$$
$$f''' b_0 + 3 f'' b_1 + 6 f' b_2 + 6 f b_3 = 6 a_3$$
$$(*) \quad f^{(4)} b_0 + 4 f''' b_1 + 12 f'' b_2 + 24 f' b_3 + 24 f b_4 = 24 a_4$$
$$f^{(5)} b_0 + 5 f^{(4)} b_1 + 20 f''' b_2 + 60 f'' b_3 + 120 f' b_4 + 120 f b_5 = 120 a_5$$

- - - - - - - - - - -

$$f^{(n)} b_0 + n f^{(n-1)} b_1 + n(n-1) f^{(n-2)} b_2 + \ldots + \frac{n!}{k!(n-k)!} f^{(n-k)} b_k + \ldots = n!\, a_n$$

Meg kell jegyezni, hogy a szükséges számú egyenletet kihagyás nélkül az elejéről kell venni és eggyel kevesebbet, mint az ismeretlenek száma, mert az $\frac{A}{B}$ törtben egy együttható tetszőlegesen választható /legjobb $b_0 = 1$/. Fő szempont, hogy annyi egyenletet használhatunk, mig az egyenletrendszer nem lesz ellentmondó. Minél többet tudunk felhasználni, annál jobb lesz a közelítőképlet.

Példaképpen számítsuk ki

$$\ln(1+x)$$

egyik közelítő törtjét, melynek alakja legyen

$$f(x) \approx \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$$

Hat egyenletet kell felírni és ehhez csak a következő egyszerű számítást kell elvégezni:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \ln(1+x) & f(0) &= 0 \\
f'(x) &= (1+x)^{-1} & f'(0) &= 1 \\
f''(x) &= -(1+x)^{-2} & f''(0) &= -1 \\
f'''(x) &= 2(1+x)^{-3} \quad \rightarrow & f'''(0) &= 2. \\
f^{(4)}(x) &= -6(1+x)^{-4} & f^{(4)}(0) &= -6 \\
f^{(5)}(x) &= 24(1+x)^{-5} & f^{(5)}(0) &= 24
\end{aligned}
$$

Helyettesitsük ezeket az értékeket a (*) rendszerbe:

$$
\left.
\begin{aligned}
0 \cdot b_0 &= a_0 \\
b_0 &= a_1 \\
-b_0 + 2b_1 + 0 &= 2a_2 \\
2b_0 - 3b_1 + 6b_2 &= 6a_3 \\
-6b_0 + 8b_1 - 12b_2 &= 0 \\
24b_0 - 30b_1 + 40b_2 &= 0
\end{aligned}
\right\}
$$

Mivel nem szerepel $a_4, a_5 \ldots b_3, b_4 \ldots$, ezek értéke 0. Célszerű az utolsó egyenletekkel kezdeni a számítást, utána a többi már könnyen megy.

Legyen $b_0 = 1$ tetszőlegesen és így a gyökök:

$a_0 = 0 \qquad b_0 = 1$

$a_1 = 1 \qquad b_1 = \frac{6}{5}$

$a_2 = \frac{7}{10} \qquad b_2 = \frac{3}{10}$

$a_3 = \frac{1}{30}$

A keresett közelítőtört tehát:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{0 + x + \frac{7}{10}x^2 + \frac{1}{30}x^3}{1 + \frac{6}{5}x + \frac{3}{10}x^2} = \boxed{\frac{30x + 21x^2 + x^e}{30 + 36x + 9x^2} \approx \ln(1+x)}$$

Még gyorsabban számíthatnánk e^x képletét, mert itt

$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = 1$ és az eredmények:

$$e^x \approx \frac{2+x}{2-x} \approx \frac{12 + 6x + x^2}{12 - 6x + x^2} \approx \frac{120 + 60x + 12x^2 + x^3}{120 - 60x + 12x^2 - x^3}, \ldots$$

Megjegyzés: $\ln(1+x)$-et legjobb $\frac{A_n}{B_n}$ vagy $\frac{A_{n+1}}{B_n}$ alakú törtekkel közelíteni, ugyanis ezek simulnak legjobban a $\ln(1+x)$ gyökénez és

$$\ldots < \frac{A_{n-1}}{B_n} < \frac{A_n}{B_n} < \ln(1+x) < \frac{A_{n+1}}{B_n} < \frac{A_{n+2}}{B_n} < \ldots$$

Az egymás után következő

$$\frac{A_k}{B_k}, \quad \frac{A_k+1}{B_k}, \quad \frac{A_k+1}{B_k+1}, \quad \frac{A_k+2}{B_k+1}, \ldots$$

közelítőtörteknek fontos tulajdonsága még, hogy két szomszédos tört különbsége minimális:

$$\frac{A_k}{B_k} - \frac{A_{k+1}}{B_k} = \frac{Cx^{2k+1}}{B_k^2}$$, ahol C állandó

A Szemle következő számában a következő témákkal fogunk foglalkozni:

C. <u>Törtfüggvénysorozatok alkalmazása</u>

a. Függvényegyenletek megoldása

b. Differenciálegyenletek megoldása; alkalmazása a fizikában és a kémiában

c. Integrálás differenciálás segítségével