Horváth Zoltán[*]

Felületek Gauss-féle főmennyiségei

Rezümé A felületek definiálásával kapcsolatban a görbék definiálásához hasonló, de még súlyosabb problémák lépnek fel. Több szempont alapján is be lehet vezetni a felületet; én az elemi felületek szabályos összeillesztésén keresztül definiáltam. Az általam tárgyalt matematikai fogalmak közül kiemelkedő fontossággal bírnak az első- és másodrendű Gauss-féle főmennyiségek. Ezeket a mennyiségeket a híres német matematikus, Carl Friedrich Gauss vezette be – amire az elnevezés is utal. A Gauss-féle főmennyiségeket széleskörűen alkalmazzák: a felületi görbék ívhosszának kiszámítására, hajlásszögük, valamint görbületük meghatározására, felületek felszínének kiszámítására.

Резюме У введенні визначення поверхонь, подібно до визначення кривих, виникають проблеми. Дати визначення поверхні можна по-різному. У статті визначення поверхні введене за допомогою правильного складання елементарних поверхонь. Найголовніші математичні поняття, які досліджено, – квадратичні форми першого та другого порядків. Дефініцію цих квадратичних форм дав видатний німецький математик – Карл Фрідріх Гаус. Квадратичні форми першого та другого порядків широко застосовуються у обчисленні довжини дуг, кута перетину та кривини поверхневих кривих, а також в обчисленні площі поверхонь.

A felület meghatározása

A differenciálgeometriában a felületeket lényegében ugyanúgy értelmezzük, mint a görbéket; figyelembe kell vennünk azonban, hogy a felület nem egyparaméteres ponthalmaz, hanem a térbeli pontok kétparaméteres halmaza. A görbék definícióját lényegében az egyszerű görbeívre alapoztuk, a felületek értelmezésekor is az egyszerű felületdarabra vagy röviden az elemi felület fogalmára támaszkodunk.

Definíció: Elemi felületnek nevezzük a sík tetszőleges, egyszeresen összefüggő, korlátos, zárt tartományának (pl. egy zárt körlemeznek vagy téglalapnak) topológikus képét.

Az elemi felületek tehát $r(u,v)$ kétparaméteres skalárváltozós vektorfüggvénnyel adhatók meg, ahol $r(u,v)$ az (u,v) paramétersík valamely egyszeresen összefüggő, korlátos, zárt tartományának kölcsönösen egyértelmű, inverzével együtt folytonos leképzése a háromdimenziós eukleidészi térbe.

Az elemi felületeket a határaik mentén összeilleszthetjük.

Definíció: Két elemi felület összeillesztéséről azt mondjuk, hogy szabályos, ha a két elemi felület csak véges sok határ „szakasz” mentén csatlakozik.

Továbbá a csatlakozási szakaszoknak mint görbe íveknek a belső pontjai legyenek a felületnek is belső pontjai. Egy pont a felület belső pontja, ha van körlemezzel homeomorf környezete a felületen. Tehát az elemi felület minden pontja a határpontok kivételével belső pont.

* A II. Rákóczi Ferenc Kárpátaljai Magyar Főiskola V. évfolyamos matematika szakos hallgatója. A tanulmányt Kudlotyák Csaba lektorálta.

Természetesen a szabályos összeillesztésekkel nyert alakzathoz további elemi felületeket csatlakoztathatunk.

Definíció: Véges sok elemi felületből szabályos összeillesztéssel keletkező alakzatot felületnek nevezzük.

Definíció: A felület zárt, ha nincs határa (ilyen például a gömb, tórusz, egyszerű poliéder, stb.). A határral rendelkező felületet nyílt vagy határolt felületnek nevezzük (ilyen például a forgáshiperboloidok egy véges része, a félgömb és minden elemi felület).

Az ívhossz

Ismeretes a görbék ívhosszának kiszámítása. Az $r(u,v)$ felületen az $u=u(t)$, $v=v(t)$ egyenletek által meghatározott $\tilde{r}(t)=r(u(t),v(t))$ felületi görbének a t_0 ponttól számított ívhossza a következő:

$$s(t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\left|\tilde{r}'(t)\right|dt=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\left(\tilde{r}'(t)\right)^2}\,dt \tag{1}$$

Az integrál kiszámításához meg kell tehát határoznunk az $\left|\tilde{r}'(t)\right|$ értékét. Az összetett függvények differenciálási szabálya szerint:

$$\tilde{r}'=r_u u'+r_v v' ,$$

ezért

$$\left|\tilde{r}'\right|=\sqrt{(r_u u'+r_v v')(r_u u'+r_v v')}=\sqrt{r_u r_u u'^2+2r_u r_v u'v'+r_v r_v v'^2} .$$

Definíció: A négyzetgyökjel alatti $r_u r_u$, $r_u r_v$, $r_v r_v$ skaláris szorzatokat, amelyek (u,v)-nek a függvényei (vagyis függetlenek a görbétől), a felület első alapmennyiségeinek (Gauss-féle főmennyiségeknek) nevezzük, és a következőképpen jelöljük:

$$E=r_u r_u ,\quad F=r_u r_v ,\quad G=r_v r_v .$$

Ezeket a jelöléseket Gauss vezette be. Az első alapmennyiségekkel tehát az ívhossz a következő alakban írható fel:

$$s=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2}\,dt \tag{2}$$

Ebből

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2 \tag{3}$$

Definíció: A (3)-as képlet jobb oldalán álló kvadratikus alakot a felület első alapformájának nevezzük.

Ezt az összefüggést gyakran írják fel az ívelemre:

$(ds)^2 = E(du)^2 + 2Fdudv + G(dv)^2$.

Az első alapforma pozitív definit kvadratikus alak. Erről úgy győződhetünk meg, hogy kiszámítjuk az alak diszkriminánsát, az $EG - F^2$ kifejezést. Ha r_u és r_v hajlásszögét α -val jelöljük, akkor:

$$EG - F^2 = (r_u r_u)(r_v r_v) - (r_u r_v)^2 = |r_u|^2 |r_v|^2 - |r_u|^2 |r_v|^2 \cos^2\alpha =$$
$$= |r_u|^2 |r_v|^2 (1 - \cos^2\alpha) = |r_u|^2 |r_v|^2 \sin^2\alpha = |r_u \times r_v|^2 > 0,$$

eszerint az első alapforma definit; mivel $= r_u r_u > 0$, azért pozitív definit.

Szögmérés

Legyen $r(u,v)$ kétparaméteres skalárváltozós vektorfüggvény által leírt felület és $u_1(t)$, $v_1(t)$, illetve $u_2(t)$, $v_2(t)$ koordinátafüggvényekkel megadott $\tilde{r}_1 = r(u_1(t), v_1(t))$, illetve $\tilde{r}_2 = r(u_2(t), v_2(t))$ felületi görbe. Tegyük fel, hogy a közös t_0 paraméterértéknek mindkét görbén a felület $r(u_0, v_0)$ pontja felel meg, azaz $r(u_0, v_0) = \tilde{r}_1(t_0) = \tilde{r}_2(t_0)$.

Határozzuk meg az $r(u_0, v_0)$ pontban e két görbe hajlásszögét, azaz az e pontbéli érintők közötti szöget.

Az érintővektorok:

$$\tilde{r}_1'(t_0) = r_u(u_0, v_0)u_1'(t_0) + r_v(u_0, v_0)v_1'(t_0)$$
$$\tilde{r}_2'(t_0) = r_u(u_0, v_0)u_2'(t_0) + r_v(u_0, v_0)v_2'(t_0)$$

így az érintővektorok skaláris szorzata:

$$\tilde{r}_1'\tilde{r}_2' = r_u r_u u_1' u_2' + r_u r_v u_1' v_2' + r_v r_u v_1' u_2' + r_v r_v v_1' v_2' =$$
$$= Eu_1' u_2' + F(u_1' v_2' + u_2' v_1') + Gv_1' v_2' .$$

Az összefüggés az (u_0, v_0), illetve a t_0 helyre vonatkozik. A két érintővektor α hajlásszögének koszinusza tehát:

$$\cos\alpha = \frac{Eu_1' u_2' + F(u_1' v_2' + u_2' v_1') + Gv_1' v_2'}{\sqrt{Eu_1'^2 + Fu_1' v_1' + Gv_1'^2}\sqrt{Eu_2'^2 + Fu_2' v_2' + Gv_2'^2}} \tag{4}$$

Speciálisan, az (u_0, v_0) ponton átmenő u - paramétervonal és v - paramétervonal által bezárt szög koszinusza

$$cos\alpha = \frac{F}{\sqrt{EG}} \tag{5}$$

mert itt $u_1 = t$, $v_1 = 0$, illetve $u_2 = 0$, $v_2 = t$ (az E, F, mennyiségeket természetesen az (u_0, v_0) pontban kell vennünk). A (5)-ös képlet azt mutatja, hogy a paramétervonalak ott és csak ott merőlegesek, ahol $F = 0$. Mivel $EG - F^2 > 0$, azért $EG > F^2$, $\sqrt{EG} > F$, tehát $cos\alpha < 1$, vagyis a paramétervonalak nem érintik egymást.

Felületek felszíne

A folytonosan differenciálható görbéknek mindig létezik ívhossza, és ez a görbébe írható sokszögek hosszának felső határa, ha a felosztást minden határon túl finomítjuk, akkor a beírt sokszögek hossza konvergál az ívhosszhoz.

Ha – ennek megfelelően – a felszínt a beírt soklapok felszínének felső határaként akarnánk értelmezni, akkor már egyszerű felületeket, mint például a henger palástját véve is, végtelent kapnánk eredményül, tehát a felszín ilyen definiálása nem helytálló.

Próbálkozhatnánk a következő definícióval: a felszín a beírt soklapok felszínének határértéke, mikor a beírt soklapok oldallapátmérőinek legnagyobbika is nullához tart. De ez a definíció sem megfelelő.

A felület felszínét a felületet érintő „pikkelyek" területösszegének határértékével definiáljuk.

Tételezzük fel, hogy a mérendő felületdarabot az (u, v) paramétersík T tartományán értelmezett és ott legalább egyszer folytonosan differenciálható $r = r(u, v)$ skalárváltozós vektorfüggvény állítja elő. Készítsünk a T tartomány fölé egy téglalapokból álló hálózatot azáltal, hogy az u-tengely alkalmasan választott

$$u_1 < u_2 < \ldots < u_m \qquad u_i - u_{i-1} = \Delta u_i$$

illetve a v - tengely

$$v_1 < v_2 < \ldots < v_n \qquad v_i - v_{i-1} = \Delta v_i$$

osztópontjain át a v -, illetve u - tengellyel párhuzamos egyeneseket fektetünk.

A felszín kiszámításához az összes olyan téglalapot figyelembe veszszük, amely a T tartományán belsejébe esik. Minden ilyen téglalap bal alsó csúcspontjához megkeressük a megfelelő felületi pontot, és ott meghatározzuk az $r_u(u_i,v_k)\Delta u_i$, valamint $r_v(u_i,v_k)\Delta v_k$ felületi érintővektorokat. Egy ilyen érintővektorpár által kifeszített érintőparalelogramma területe

$$\left|r_u(u_i,v_k)\times r_v(u_i,v_k)\right|\Delta u_i\Delta v_k=\sqrt{E(u_i,v_k)G(u_i,v_k)-F^2(u_i,v_k)}\Delta u_i\Delta v_k .$$

Ha ezután az összes számításba veendő téglalapra elvégezzük e „pikkelyek" területének összegzését, akkor az

$$S=\iint_T\sqrt{EG-F^2}\,dudv \tag{6}$$

kettős integrál egyfajta közelítő összegét kapjuk, amely a hálózat megfelelő finomítása esetén konvergál az integrálhoz. Ugyanehhez az integrálhoz jutunk el akkor is, ha a felszínt a megfelelően beírt vagy az érintő poliéderek felszínének határaként definiáljuk. A kapott eredmény független a felület paraméteres előállításától.

A (6)-os képlettel számolhatjuk ki a felület felszínét, ha a felületet az $r=r(u,v)$ skalárváltozós vektorfüggvény állítja elő.

Ha a felületet $z=f(x,y)$ alakban adjuk meg, akkor az

$$x=u\,,\qquad y=v\,,\qquad z=f(u,v)$$

paraméteres előállítást választva

$$r_u=\vec{i}+f_u\vec{k}\qquad \text{és}\qquad r_v=\vec{j}+f_v\vec{k}$$

(az $\vec{i}$, $\vec{j}$, illetve $\vec{k}$ vektor az x-, y-, illetve z-tengely pozitív irányába mutató egységvektor). Ezért

$$E=r_u^2=1+f_u^2\,,\qquad F=r_ur_v=f_uf_v\,,\qquad E=r_v^2=1+f_v^2$$

tehát

$$EG-F^2=\left(1+f_u^2\right)\left(1+f_v^2\right)-f_u^2f_v^2=1+f_u^2+f_v^2 .$$

Mivel esetünkben az u és x, illetve v és y változók megegyeznek, ezért

$$S=\iint_T\sqrt{EG-F^2}\,dudv=\iint_T\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy \tag{7}$$

A (7)-es képlettel számolhatjuk ki a felület felszínét, ha a felületet $z = f(x,y)$ alakban adjuk meg.

Ha a felület a $\Phi(x,y,z) = 0$ implicit alakban adott, akkor a felület explicit egyenlete $z = \phi(x,y)$ alakban írható fel, s ha ezután a

$$\Phi(x,y,\phi(x,y)) \equiv 0$$

azonosság deriválásával adódó

$$\phi_x = -\frac{\Phi_x}{\Phi_z}, \quad \text{illetve} \quad \phi_y = -\frac{\Phi_y}{\Phi_z}$$

deriváltakat a $\sqrt{1+\phi_x^2+\phi_y^2}$ kifejezésbe helyettesítjük, akkor a felszínre az

$$S = \iint_T \frac{\sqrt{\Phi_x^2+\Phi_y^2+\Phi_z^2}}{|\Phi_z|} dxdy \tag{8}$$

integrált kapjuk.

A (8)-as képlettel számolhatjuk ki a felület felszínét, ha a felületet $\Phi(x,y,z) = 0$ implicit alakban adott.

A (8)-as képletet felhasználhatjuk egy olyan forgásfelület felszínének kiszámítására, amely az x-tengely $[a;b]$ intervallumán folytonosan differenciálható $y = f(x)$ függvény görbéjének az x-tengely körüli megforgatásával keletkezik. Ekkor ugyanis (alkalmas irányítású z-tengely felvételével) $y^2 + z^2 = f^2(x)$, tehát a forgásfelület egyenlete implicit alakban

$$\Phi(x,y,z) \equiv f^2(x) - y^2 - z^2 = 0 .$$

Mivel

$$\Phi_x = 2f \cdot f', \quad \Phi_y = -2y, \quad \Phi_z = -2z,$$

ezért

$$S = \iint_T \frac{\sqrt{f^2 \cdot f'^2 + y^2 + z^2}}{|z|} dxdy = \iint_T \frac{f\sqrt{1+f'^2}}{\sqrt{f^2-y^2}} dxdy .$$

Ha ezt a kettős integrált kétszeres integrálással akarjuk kiszámítani, akkor a következőt kapjuk:

$$S=\iint_T \frac{f\sqrt{1+f'^2}}{\sqrt{f^2-y^2}}dxdy=\int_a^b f\sqrt{1+f'^2}\int_0^{f(x)}\frac{dy}{\sqrt{f^2-y^2}}dx=$$

$$=\int_a^b f\sqrt{1+f'^2}\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}dx=\frac{\pi}{2}\int_a^b f\sqrt{1+f'^2}dx$$

Minthogy – az integrál határából láthatóan – a forgásfelület felszínének csupán a negyedrészét számítottuk ki, ezért az $y=f(x)$ görbe x-tengely körüli megforgatásával kapott forgástest felszíne a (9)-es képlet segítségével számítható ki:

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx \qquad (9)$$

A második alapmennyiségek bevezetése

Legyen a felületet előállító $r(u,v)$ függvény kétszer folytonosan differenciálható. Az $r_0=r(u_0,v_0)$ pontban a felület érintősíkjának egyenlete

$(p-r_0)m_0=0$,

ahol m_0 a felület egységnyi normálvektora az adott pontban. Tekintsük az $r(u,v)$ függvény másodrendű Taylor-kifejtését:

$$r(u_0+h,v_0+k)=r(u_0,v_0)+r_u(u_0,v_0)h+r_v(u_0,v_0)k+$$

$$+\frac{1}{2}\left(r_{uu}(u_0,v_0)h^2+2r_{uv}(u_0,v_0)hk+r_{vv}(u_0,v_0)k^2\right)+a(h.k);$$

itt $\dfrac{a(h.k)}{h^2+k^2}\to 0$, ha $h,k\to 0$.

Hagyjuk el az $a(h.k)$ maradéktagot, a Taylor-kifejtés $r^*(h.k)$ főrésze olyan másodrendű felületet határoz meg, amely átmegy az r_0 ponton, és e pontban másodrendben közelíti meg az eredeti, $r(u,v)$ felületet.

Az $r^*(h.k)$ másodrendű felület valamely pontjának az $r(u,v)$ felület r_0-beli érintősíkjától mért előjeles távolságát a

$$d = \left(r^* - r_0\right)m_0 = \frac{1}{2}\left(m_0 r_{uu}\left(u_0, v_0\right)h^2 + 2m_0 r_{uv}\left(u_0, v_0\right)hk + m_0 r_{vv}\left(u_0, v_0\right)k^2\right) \quad (10)$$

kifejezés adja.

Definíció: Az (10)-es kifejezésben szereplő

$$L = r_{uu}m, \qquad M = r_{uv}m, \qquad N = r_{vv}m$$

mennyiségeket a felület r_0 pontbeli második alapmennyiségeinek (másodrendű Gauss-féle főmennyiségeinek) nevezzük.

A felület második alapmennyiségei kifejezhetők az első alapmennyiségeken keresztül.

$$m = \frac{r_u \times r_v}{\left|r_u \times r_v\right|}$$

$$\left|r_u \times r_v\right| = \sqrt{EG - F^2}$$

$$L = \frac{r_{uu}\left(r_u \times r_v\right)}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{r_{uu} r_u r_v}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad M = \frac{r_{uv}\left(r_u \times r_v\right)}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{r_{uv} r_u r_v}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$N = \frac{r_{vv}\left(r_u \times r_v\right)}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{r_{vv} r_u r_v}{\sqrt{EG - F^2}}$$

$$L = \frac{\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad M = \frac{\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad N = \frac{\begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}} \quad (11)$$

Az (11)-es képlet segítségével számíthatjuk ki a felület második alapmennyiségeit.

Az L, M, N jelölést is Gauss vezette be. Azt látjuk tehát, hogy az $r^*\left(h.k\right)$ másodrendű felület pontjainak az r_0 -beli érintősík pontjaitól való távolsága olyan kvadratikus alakkal fejezhető ki, amelynek együtthatói az r_0 pontbeli L, M, N mennyiségek.

Ez a kvadratikus alak a következő:

$$Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2 \quad (12)$$

Definíció: A (12)-es kvadratikus alakot a felület második alapformájának nevezzük.

Az első alapmennyiségek az ívhossz-, szög- és felszínmérést, tehát a felület metrikáját határozzák meg. Egymástól különböző felületeknek is lehet azonos metrikája. Csavarjunk például henger alakúra egy síklapot, ezzel sem a síklap görbéinek hossza, sem a görbék hajlásszöge, sem a felületdarabok felszíne nem változik. Az E, F, G első alapmennyiségek tehát csak a felület metrikáját határozzák meg, a felület térbeli alakját már nem. Éppen ezt adják meg az L, M és N második alapmennyiségek.

A felületen lévő görbék görbülete

Tekintsük meg az $r(u,v)$ kétszer folytonosan differenciálható függvénnyel leírt felületet. Megmutatjuk, hogy az $\tilde{r}(t)=r(u(t),v(t))$ felületi görbe $\tilde{r}(t)$ pontbeli görbületét már a görbe érintőjét meghatározó u', v' értékekből és a görbe n főnormáljának a felület m normáljával bezárt hajlásszögéből is kiszámíthatjuk. Ha $mn \neq 0$, akkor a görbület megegyezik a görbe simulósíkja által a felületből kimetszett görbe $\tilde{r}(t)$ pontbeli görbületével. (A vizsgálatból kizárjuk azokat a pontokat, ahol $mn = 0$, azaz ahol a görbe simulósíkja egybeesik a felület érintősíkjával.)

Bevezetjük a görbén paraméterként az ívhosszt az $s = s(t)$, illetve ennek inverzét jelölő $t = t(s)$ függvények segítségével.

Mivel $r(t)$ felületi görbe, ezért

$$e=\frac{d\tilde{r}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\left(r_u u'+r_v v'\right)\frac{dt}{ds}$$
$$e'=\frac{\partial^2 r}{\partial u^2}u'^2\left(\frac{dt}{ds}\right)^2+2\frac{\partial^2 r}{\partial u\partial v}u'v'\left(\frac{dt}{ds}\right)^2+\frac{\partial^2 r}{\partial v^2}v'^2\left(\frac{dt}{ds}\right)^2+\alpha r_u+\beta r_v,$$

ahol α és β a többi tényező s szerinti deriválásából adódó függvényeket jelöli. Használjuk fel az $e' = gn$ Frenet-képletet, majd szorozzuk meg skalárisan m -mel az így kapott vektoregyenlőség mindkét oldalát:

$$e'm = gnm = \left(Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2.$$

Ebből és a

$$\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = \frac{1}{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}$$

összefüggésből azt kapjuk, hogy

$$gnm = \frac{Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2}{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}.$$

Ennek alapján állíthatjuk, hogy gnm értéke egy adott pontban csak az érintő irányától függ. Mivel az m felületi normál e pontban ugyanaz, ezért a görbe e pontbeli görbülete csak e-től és n-től függ. Ha az adott ponton át megegyező érintőjű felületi görbéket húzunk, akkor a görbület már csak az n-től függ. Minthogy a görbe adott pontjában a simulósík által a felületből kimetszett görbének érintője is, normálisa is azonos a görbe érintőjével, illetve normálisával, ezért a simulósík által kimetszett felületi görbe e pontbeli görbülete azonos magának a görbének a görbületével.

Ez azt jelenti, hogy a felület adott pontján áthaladó, adott érintőjű és főnormálú görbék közül elég, ha az egyetlen ilyen tulajdonságú síkgörbét (azaz a görbék közös simulósíkja által kimetszett görbét) vizsgáljuk, mivel e pontban a többi görbének is ugyanekkora a görbülete.

A felületi görbe görbületére levezetett formulából további összefüggéseket is kaphatunk. Az nm skaláris szorzat értéke éppen az n és m által bezárt szög koszinusza, mivel mindkét vektor egységvektor. Tehát az azonos érintőjű görbéket kimetsző síkok közül ahhoz tartozik az adott pontban minimális görbületű görbe, amely az e vektoron kívül az m-et is tartalmazza. Ez nem más, mint az érintősíkra merőleges sík. Ezt a síkot normálsíknak, a síkmetszetet normálmetszetnek, a normálmetszet görbületét normálgörbületnek, a többi síkmetszetet ferde metszetnek nevezzük. Az adott érintőjű síkmetszetek közül a normálmetszet a legkisebb görbületű az adott pontban. A normálgörbületnek előjelet is adunk: az előjel pozitív (negatív), ha a görbe főnormál egységvektora a felület egységnyi normálvektorával megegyező (ellentétes) irányú. Ezt az nm skaláris szorzat mutatja, amely az első esetben $+1$, a másodikban pedig -1.

Így tehát

$$g_n = \frac{Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2}{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2} \tag{13}$$

A (13)-as képlet adja az előjelezett normálgörbületet.

Ha ívhosszparamétert használunk, akkor az $Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2 = 1$ összefüggést felhasználva, ezt a képletet kapjuk:

$$g_n = Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2 \qquad (14)$$

A (14)-es képlet a normálgörbületet fejezi ki ívhosszparaméter esetén.

Az előjeles normálgörbület többet mond a felület görbületi viszonyairól, mint az előjel nélküli. Ez kitűnik például a hiperbolikus paraboloid vizsgálatakor. A felület bármely pontjában van olyan normálmetszet, melynek főnormálja a felületi normáléval egyező irányú. Így a pontbéli normálgörbületek között van pozitív és negatív is. Megjegyezzük még, hogy a normálgörbület előjele függ a paraméterezéstől, hiszen az m felületi normálvektor irányítása maga is függ a paraméter megválasztásától. Ha a paramétertranszformáció irányítástartó, akkor a normálvektor irányítása változatlan, s így a normálgörbület előjele is a korábbi marad. Irányításváltó paramétertranszformációkor viszont mindkettő ellenkezőjére fordul. A lényeges az, hogy az adott ponton átmenő normálmetszetek egymáshoz képesti előjelviszonyai nem változnak.

Felhasznált irodalom

В. П. Білоусова (1973): *Аналітична геометрія.* Київ.

Hajós György (1979): *Bevezetés a geometriába.* Tankönyvkiadó, Budapest.

Hajós György (1964): *Differenciálgeometria 1.* Tankönyvkiadó, Budapest.

Hajós György (1965): *Differenciálgeometria 2.* Tankönyvkiadó, Budapest.

Pach Zs. Pálné–Frey Tamás (1964): *Vektor- és tenzoranalízis.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest.

Rapcsák András–Tamássy Lajos (1968): *Differenciálgeometria I.* Tankönyvkiadó, Budapest.

Szolcsányi Endre (1997): *Differenciálgeometria és vektoranalízis.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.

Szőkefalvi-Nagy Gyula–Gehér László–Nagy Péter (1979): *Differenciálgeometria.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest.