

# SZAVAZÁSELMÉLET ÉS MECHANIZMUSTERVEZÉS

Csekő Imre

egyetemi docens,  
Budapesti Corvinus Egyetem  
cseko@uni-corvinus.hu

Egy emlék a közelmúltból, Magyarországról: ismert közíró fejtegeti a televízióban, hogy az országgyűlési választásokon „megosztotta a szavazatát”, nem arra a pártra szavazott listán, mint amelyik jelöltjére az egyéni szavazatát adta. Elmondása szerint ezt azért tette, mert remélte, hogy ezzel hozzájárul a listás szavazatát élvező párt parlamentbe jutásához, és végső soron ahhoz, hogy a számára rokonszenves politikai oldal kerüljön kormányra.

Ugyanezen a választáson egy budapesti választókerületben az első forduló eredménye alapján három párt jelöltje jut a második fordulóba, rendre a szavazatok 40, 32, illetve 27 %-ával. Ha feltételezzük, hogy a szavazók nem változtatják meg véleményüket a két forduló közt eltelt két hétben, és ugyanúgy szavaznak, joggal gondolhatjuk, hogy a 40 %-os jelölt válik képviselővé. Nem így történt: a 32 %-os jelölt visszalépése után, a korábban 27 %-os jelölt szerzi meg a szavazatok többségét és így az országgyűlési mandátumot. Egy másik választókerületben az első fordulóban legtöbb szavazatot kapott három párt jelöltje (48 %, 44 % és majdnem 5 %) mind elindult a második fordulóban, ahol rendre 51, 47 és 2 %-ot kaptak (kerekítve). Itt azt tapasztaljuk, hogy a választók pártoltak el az esélytelen jelölttől.

Egy másik eset a nem is olyan közeli múltból, az Amerikai Egyesült Államokból: 1908-ban az addigi republikánus elnök, Theodore Roosevelt nem indult a választásokon, szinte tálcán nyújtva át az elnökséget hadügyminiszterének, W. Taftnak. A következő évek során azonban az addig szorosan együttműködő két republikánus politikus között komoly nézeteltérés alakult ki, ezért az 1912-es előválasztások során mindketten harcba léptek a republikánus jelöltségért. A párt Taft mellett tette le a voksát. Rooseveltt új választási pártot alapított, és elindult az elnökségért. Az elnök a demokrata Woodrow Wilson lett az országos (tehát nem az elektori) szavazatok mindössze 42 %-ával, megelőzve Rooseveltet (27 %) és Taftot (23 %) is. A republikánus érzelmi szavazók nyilvánvaló többségük ellenére csak a fejüket foghatták: ha felsorakoznak erősebb jelöltjük mögé, megnyerik a választásokat. Esetleg nem magukat, hanem a választási rendszert szidhatták: ha lett volna második forduló, bizonyára republikánus elnök került volna hatalomra 1912-ben is.

Vajon ezek a példák egyediek? Csak ilyen bonyolult választási rendszerekben, mint a magyar vagy az amerikai, érdemes a nem hozám legközelebb álló jelöltre szavazni? Csak ilyen rendszerben van értelme a visszalépés-

nek? Vajon létezik-e olyan választási szisztéma, amely kiküszöböli ezeket és az ezekhez hasonló jelenségeket?

A választ messziről, egy általános modell megfogalmazásával kell kezdenünk, és sajnos csak egy viszonylag egyszerű szerkezetű választási problémával van módunk és helyünk foglalkozni. Az üzenet azonban egyértelmű lesz: nincs – elméletileg nem létezik – olyan választási rendszer, amelyben nem léphetnek fel hasonló jelenségek.

## A társadalmi választás modellje

Modellünkben  $I$  számú választó (szavazó) véges sok,  $N$  jelölt közül választ pontosan egyet. A jelöltek halmaza legyen az  $X$  halmaz. Minden választó rangsorolja a jelölteket. Az egyszerűség kedvéért végig tételezzük fel, hogy ez a rangsor szigorú, azaz nincs két „egyformán jó” jelölt egy választó számára sem. Azt is feltételezzük, hogy a választás eredménye csak ezen egyéni rangsorok függvénye.

Különböztessük meg a választókat az  $i = 1, \dots, I$  index segítségével. Az  $i$ -edik szavazó rangsorát jelölje az  $R_i$  szimbólum. Ha ezeket a rangsorokat egymás mellé írjuk, akkor az ún. preferenciaprofilunkat kapjuk, jelölése  $(R_1, R_2, \dots, R_I)$ . Egy ilyen preferenciaprofil alapján a társadalmi választási függvény ( $TVF$ ) segítségével határozzuk meg a kívánatos eredményt. Azért szerepeltetünk függvényt és nem egy konkrét kiválasztott jelöltet e helyütt a modellben, mert noha egy választónak egy időben természetesen csak egy rangsora lehet, de ennek a pontos mibenlétéről csak ő tud. Éppen ezért több profil is szóba jöhet egy-egy konkrét választás esetében, és az összes elképzelhető profilon ki kell tudnunk számítani az eredményt. Ha például három jelöltünk van, akkor hatféle rangsor létezhet, és ha a választók száma is három, akkor a  $6 \times 6 \times 6 = 216$  lo-

gikailag lehetséges profil adódik. Az  $f$  társadalmi választási függvény tehát minden preferenciaprofilhoz egy jelöltet rendel, ő a választás győztese.

A kérdés ezután az, hogy milyen tulajdonságai legyenek ennek a társadalmi választási függvénynek. Néhány természetesnek tűnő kívánalom a következő:

- legyen anonim, azaz ne különböztesse meg a választókat. Ha két tetszőleges választó rangsorát felcseréljük, az eredmény ne változzon;
- legyen semleges, azaz ne különböztesse meg a jelölteket. Amennyiben minden választó rangsorában két tetszőleges jelölt helyét felcseréljük, akkor, ha előbb az egyiket választottuk, akkor most a másik legyen az eredmény. Ha ez teljesül, akkor szükségképpen fennáll a választók szuverenitása, azaz minden jelölt ténylegesen megválasztható;
- legyen Pareto-hatékony. Ha egy jelöltet mindenki jobban szeret egy másiknál, akkor a választás ne lehessen ez a második jelölt;
- legyen monoton. Ha egy profil mellett választott jelölt egy másik profilban egy választó rangsorában sem kerül lejjebb, akkor továbbra is őt válasszuk.

A legismertebb két társadalmi választási függvényt még a XVIII. század végén javasolta és elemezte két francia tudós, Condorcet márki, illetve Jean-Charles de Borda. Mi itt egy egyszerű példán vizsgáljuk meg működésüket.

Egy képzeletbeli országban a kormány válságba kerül. Lemondott a pénzügyminiszter. A hatályban lévő alkotmány és a koalíciós szerződés szerint az új minisztert a jelöltek közül választják ki a koalíciós egyeztető tanács tagjai. Egyenként elbeszélgetnek a jelöltekkel, majd mindannyian leadják a jelöltek alkal-

masságára vonatkozó rangsorukat. A Condorcet márki által javasolt *abszolút többségi szabály* a következő: vessünk össze párban minden jelöltet minden másik jelölttel; egy összevetésben, ha egy jelölt több szavazónál előzi meg a rangsorban a másikat, akkor legyőzte őt; ha valaki mindenkit legyőz (senki nem győzi le őt), legyen ő a társadalmi választás. Nyilvánvaló, hogy ha a választók száma páratlan, akkor ez a társadalmi választási függvény egyidejűleg teljesíti az előbbi négy kívánalmat, azaz anonim, semleges, Pareto-hatékony és monoton. Páros esetben fellép az a probléma, hogy döntetlen alakulhat ki egyes összevetésekben a jelöltek között. Emiatt elképzelhető, hogy több olyan jelölt lesz, akit senki nem győz le. Közöttük ekkor egy alkalmas, jó esetben véletlentől függő *tie-break* (döntetlen helyzetben döntő) szabállyal választhatunk. Ha szigorúan vesszük a definíciókat, akkor ez most elronthatja a választási függvény anonimitását vagy semlegességét, sőt a monotonitást is, de ha a véletlen okozza a tulajdonságok sérülését, akkor ez talán nem tekinthető túl nagy hiányosságnak. Ráadásul, ha a választók száma igen nagy, akkor annak valószínűsége, hogy ilyen szituáció előfordul, csekély. Ennél sokkal nagyobb baj azonban az, hogy e társadalmi választási függvény nem minden esetben működik, ha a jelöltek száma meghaladja a kettőt. Tekintsük ugyanis az alábbi példát! Legyen négy jelöltünk (jelöljük őket  $x, y, z, w$  szimbólumokkal), és a koalíciós tanácsot alkossa hat politikus, három-három ( $A, B, C$  és  $D, E, F$ ) a két koalíciós párt részéről! Az ő rangsoruk legyen a következő:

A	B	C	D	E	F
x	y	z	x	y	z
y	z	x	y	w	x
z	x	w	w	z	w
w	w	y	z	x	y

Vegyük észre, hogy ebben a példában nincs olyan jelölt, aki mindenkit legyőzne, hiszen  $x$  legyőzi ugyan  $y$ -t és  $w$ -t, de kikap  $z$ -tól. Hasonlóképpen  $y$  legyőzi  $z$ -t és  $w$ -t, de kikap  $x$ -tól,  $z$  legyőzi  $x$ -et és  $w$ -t, de kikap  $y$ -tól. A leggyengébb jelölt  $w$ , ő mindenkitől kikap. Az ilyen helyzetet, amelyben körbeverés van, szavazási paradoxonnak hívjuk. Ha megengedjük, hogy az egyéni rangsorok tetszőlegesek legyenek, és vajon milyen alapon tilthatnánk ezt meg, akkor a szavazási paradoxon elkerülhetetlenül fellép, és nem lesz Condorcet-győztesünk. Ez a társadalmi választási függvény ilyen szituációkban nem jól definiált, nem működik.

A Jean-Charles de Borda által javasolt rangsoros szavazás azonban nem szenved ettől a hibától. Ebben a rendszerben az, aki egy szavazólapon a legelső, kap  $N = 4$  pontot, a második  $N - 1 = 3$ -at, és így tovább. Végül a jelöltek így szerzett pontjait összeadják. Azé lesz a bársonyszék, aki a legtöbb pontot gyűjtötte. E módszer is Pareto-hatékony, további feltétlen előnye, hogy inkább figyelembe veszi a pályázók közti különbségeket, mint a többségi szavazás, és működőképes, akárhogy alakulnak is a tanács tagjainak preferenciái. A mi fenti példánkban például  $x$  jelölt 17 pontot gyűjtött, a többiek legfeljebb 16-ot, így van győztes. Persze e társadalmi választási függvénynél még páratlan számú szavazó esetén is előfordulhat, hogy két jelölt ugyanannyi pontot szerez. Ebben az esetben most is sorolással dönthetjük el, ki kerül ki győztesen a küzdelemből. Sajnos elképzelhető az, hogy ez a *TVF* – jó tulajdonságai ellenére – még akkor sem eredményezi a Condorcet-győztest, ha az létezik. Ennél is sokkal nagyobb probléma, hogy olyan esetekben is sérülhet a monotonitás elve, ha nincs pontegyenlőség és véletlentől függő kiválasztás. Tegyük fel ugyan-

is, hogy valamilyen okból az  $E$  tag rangsora megváltozik. Legjobban a  $z$  jelöltet kedveli, őt követi  $y$  és  $w$ , majd a sor végén marad  $x$ . Ebben az esetben a rangsoros szavazás diktálta társadalmi szavazás győztese a  $z$  jelölt, noha  $x$  senki sorrendjében sem veszített teret.

#### *A társadalmi választás manipulálhatósága*

Ennél a pontnál fel kell tennünk a kérdést: miért is baj az, hogy megsérül ez a fránya monotonitás? Kit érdekel ez? Lényeg, hogy a módszer működik, anonim, semleges és Pareto-hatékony. Ha elfogadjuk is ezt az álláspontot, akkor is felmerül azonban egy nagyon súlyos probléma, amire a korábbiakban már utaltunk. Említettük, hogy egy egyéni rangsor csak az adott egyén számára ismert, privát információ. Bármilyen rangsort jelent is be valaki, legyen az a valódi vagy egy hamis sorrendje, el kell fogadnunk, mert nem tudhatjuk, igazat mondott-e. A társadalmi választási függvénynek nyilván a bejelentett preferenciaprofilon kell eredményt hoznia, mert az természetesen akár az igazi is lehet, és más támpontot a döntéshez nem tudunk felhasználni. A választók – ezt tudván – olyan rangsort fognak bejelenteni, amely elősegíti, hogy a számukra legkedvezőbb eredmény szülessen. Ha egy választó által bejelentett hamis rangsor – a többiek adott sorrendje mellett – jobb eredményre vezet a választó számára, mint a valódi, akkor azt mondjuk, hogy manipulálja a választást (pontosabban annak eredményét). Miért probléma ez? Nem természetes, hogy mindenki igyekszik a számára lehető legjobb eredményt biztosítani? Miért ne lódíthatna, ha ez számára kedvező? A következő példa választ ad erre a kérdésre.

Az előző példában szereplő négy jelölt közül kettő,  $x$  és  $y$ , igen markáns személyiség, képzettségük kiváló, nemzetközileg is tisztelt,

elfogadott szakteknitvények, de külön-külön igen erősen kötődnek a koalíciót alkotó egyik párthoz, sajnos, nem ugyanahhoz. A másik két jelölt –  $z$  és  $w$  – is tehetséges, de a koalíciós tanács tagjai mindannyian tisztában vannak azzal, hogy az előző két jelölt alkalmasabb. A preferenciaprofil lehet tehát a következő:

A	B	C	D	E	F
x	x	x	y	y	y
y	y	y	x	x	x
z	z	w	w	z	w
w	w	z	z	w	z

A tagoknak jó okuk van feltételezni, hogy mindenki elsősorban a saját pártja jelöltjére szavaz, ezért a következőképpen okoskodhatnak. „Legokosabb, ha a koalíciós partner jelöltét az utolsó helyre sorolom, így veszélyeztetni legkevésbé a mi emberünk esélyét. A második helyre pedig  $z$ -t írom, mert ő – hölgy lévén – jótékony hatással lehetne a kormányülések hangulatára.” A bejelentett profil tehát:

A	B	C	D	E	F
x	x	x	y	y	y
z	z	z	z	z	z
w	w	w	w	w	w
y	y	y	x	x	x

A szavazás elkeserítő eredménye: a pénzügyminiszter  $z$  lesz 18 ponttal, második helyre fut be vállalva  $x$  és  $y$ , mindketten 15 ponttal, míg  $w$  csupán 12 pontot szerez, és ezzel utolsó. Az eredmény lesújtó hatással van a tanács tagjaira, egymást hibáztatják azért, hogy nem a legalkalmasabb jelöltek közül került ki a poszt jövőbeni birtokosa. Pedig kár egymásra mutogatniuk, nem tehetnek semmit. E választási szabály mellett – persze, amíg betartják – egyszerűen nincs mód jobb eredmény elérésére. Bárhogy okoskodnak is, ha újabb titkos szavazásra kerülne sor, ismét ez az eredmény születne. A manipulálás

lehetősége a Pareto-hatékonyságot is elrontotta. Az eredeti rangsorokban a tanács minden tagja előrébb sorolta mind  $x$ , mind  $y$  jelöltet, mint  $z$ -t, mégis utóbbi a bársonyszék.

A rangsoros szavazás tehát egyrészt manipulálható, másrészt nem monoton. Vajon az abszolút többségi szabály nem volt ilyen? Nem egészen. Az abszolút többségi szabály egyrészt biztos monoton volt, ha a szavazók száma páratlan, sőt ebben az esetben az is megmutatható, hogy ha nem lép fel a szavazási paradoxon, akkor nem manipulálható. Nagyon úgy tűnik, hogy a manipulálhatóság és a monotonitás hiánya között valamiféle kapcsolat van. Ezt a kapcsolatot érdemes egy kicsit bővebben boncolgatnunk.

Ha egy társadalmi választási függvényt egy profilban sem tud egy választó sem manipulálni, akkor azt mondjuk, hogy a függvény nem manipulálható, vagy más szóval csalásbiztos. Egy ilyen csalásbiztos függvényről pedig könnyű belátni, hogy monoton. Legyen ugyanis egy profilban a társadalmi választás az  $x$  jelölt. Változtassuk meg a profilt úgy, hogy az első szavazó rangsora változzon meg, oly módon, hogy  $x$  nem kerül lejjebb egy olyan jelölttel szemben sem, akit eddig az első szavazó rangsorában megelőzött. Tegyük fel, hogy a társadalmi választás is megváltozik, legyen most az  $y$  jelölt. Ám ez vagy azt jelenti, hogy a második profilban az első szavazó manipulálhat azáltal, hogy az előző sorrendjét jelenti be, vagy azt, hogy az eredeti profilban manipulálhat azáltal, hogy ezt a másik rangsort jelenti be. Ez azonban ellentmond a csalásbiztosságnak. Ha tehát a függvényünk nem manipulálható, akkor  $x$  marad a társadalmi választás. Változtassuk meg hasonló módon most a második szavazó rangsorát, most azt kapjuk, hogy ő sem tudja megváltoztatni így a társadalmi döntést. Miután

véges sok szavazónk van, ezért e gondolatmenetet mindegyikükre végigkövetve kapjuk, hogy a  $TVF$  szükségképpen monoton.

Ebből következik: minden olyan  $TVF$ , amely nem monoton, az manipulálható. Felmerül tehát a kérdés: létezik-e egyáltalán csalásbiztos  $TVF$ ? A válasz persze igenlő, bár egyáltalán nem lelkesítő. Három ilyen is említünk. Az első – mint már halványan utaltunk rá – az abszolút többségi szavazás, ha a jelöltek száma nem több mint kettő, és a szavazók száma páratlan. A második esetben bárhogy alakulnak is a szavazók rangsorai, a társadalmi választás legyen mindig ugyanaz a jelölt. Ekkor nyilvánvalóan senki sem tud manipulálni, mert megváltoztatni sem tudja a végeredményt. Ez a  $TVF$  azonban nem semleges, még a szavazók szuverenitásának feltétele sem teljesül, és nem is hatékony (igaz, anonim és monoton). A harmadik nem manipulálható  $TVF$  a diktatúra, amikor minden profilban egy azonos, előre kijelölt személy – a diktátor – rangsorában első helyen lévő jelölt a választás. Ő nyilván nem manipulál, a többi szavazó pedig nem tud. Ez a  $TVF$  magától értetődően nem anonim, noha semleges, hatékony és monoton. Ezeknél sokkal jobbat ajánlani azonban nem tudunk. Igaz ugyanis a következő tétel, amelyet egymástól függetlenül fogalmazott meg *Alan Gibbard* és *Mark Satterthwaite* még a hetvenes évek első felében.

Tétel (*Gibbard–Satterthwaite*): Ha a jelöltek száma legalább három, és teljesül a szavazók szuverenitása-feltétel, valamint minden logikailag elképzelhető profil megengedett, akkor az egyetlen nem manipulálható  $TVF$  a diktatúra.

#### *Mechanizmustervezés és a szavazási eljárások*

Vegyük észre, hogy a manipulálással megjelenik a szavazók stratégiai megfontolásainak,

lépéseinek lehetősége. Mindenki arra törekszik, hogy a többiek feltételezett szavazatának függvényében a lehető legjobban járjon. Úgy adják le rangsorukat, hogy ezt a célt minél jobban teljesítsék. Ez az a pont, ahol a mechanizmustervezés, illetve annak egy alterülete, az implementációelmélet belép a képbe.

Az implementációelmélet – a legelvonhatóbb meghatározása szerint – a társadalmi választások elméletét és a játékelméletet összekapcsoló tudományterület. Általános formalizált változata a következő. Tekintsünk egy olyan döntési problémát, ahol véges sok,  $i$ -vel indexelt ( $i = 1, 2, \dots, I$ ) egyén közössége egy  $X$  döntési halmaz elemeiből választ egy részhalmazt (esetleg egy elemet). Ez a választás attól függ, milyen *világállapotban* vagyunk, a világállapotok halmaza legyen  $R$ . Egy állapotban az egyéneknek a döntési alternatívákra vonatkozó preferenciáinak együttesét, a preferenciaprofilját az  $R \in R$  paraméterrel indexeljük. A választást az  $f$  társadalmi választási szabály (függvény) adja: minden  $R \in R$ -ra,  $f(R) \subset X$ . Kitéüntetett szerepet játszik az az eset, amikor az  $f$  szabály képe egyértelmű (egyelemű halmaz). A legtöbb alkalmazásban – így a szavazáselméletben is – nyilvánvalóan ragaszkodnunk kell ehhez a megkötéshez, noha igen kellemetlen következményekkel járhat. Egy  $g$  mechanizmus minden egyénhez egy stratégiahalmazt és minden, az egyének által megjátszott stratégiaegyütteshez (stratégiaprofilhoz) egy kimenetet, egy  $X$ -beli alternatívát rendel. (Vegyük észre, itt már ragaszkodunk az egyértelműséghez!) A kérdés az, hogy amennyiben  $f$  adott, vajon találunk-e olyan  $g$  mechanizmust, amelyre minden  $R$  esetén a lejátszott játék egyensúlyi stratégiaegyütteseihez rendelt kimenetek halmaza éppen  $f(R)$ . Ha igen, akkor azt mondjuk, hogy a  $g$  mechanizmus implementálja, megvaló-

sítja az  $f$  társadalmi választási szabályt (függvényt). Az igazi nehézség az, hogy *ex ante* kell megadnunk a mechanizmust, így az nem függhet a világállapottól, hanem mindegyik állapotban egyformán működni kell.

Két megjegyzés kívánkozik ide. Az első: az általánosságnak ezen a szintjén egyelőre nem foglalkoztunk azzal, hogy ezt az  $f$  szabályt miképpen kapjuk, milyen tulajdonságokkal bír. Csupán feltesszük létezését. Később erre a kérdésre röviden visszatérünk. A második megjegyzés: e helyütt nem definiáltuk, pontosan milyen egyensúlyfogalmat használunk. Az olvasó tetszőleges egyensúlyi koncepciót (lásd később) behelyettesíthet a fenti mondatba. Természetesen a konkrét eredmények ismertetésekor már döntő szerepet játszik e választás.

A koalíciós tanács korábbi példája jó szolgálatot tesz számtalan fontos fogalom bevezetésekor. A példabeli „világállapotok”  $R$  halmaza a tanács tagjai szóba jöhető preferenciaprofiljainak összessége, az  $f$  társadalmi választási függvénytől pedig most csak annyit követeljünk meg, hogy „kifejezi a szavazók akaratát”. Igen ám, de ennek a célnak az elérését csak akkor tudjuk garantálni, ha biztos, hogy mindenki az igazi rangsorát jelenti be. Ha ugyanis ez nem biztosítható, akkor a hamis rangsorokon a szavazók akaratát legjobban kifejező kimenet nem feltétlenül jellemezhető ezzel a tulajdonsággal az igazi rangsorokon. Felmerül a kérdés, hogy tudunk-e megfogalmazni egy olyan  $g$  mechanizmust, amely ennek ellenére *implementálja, megvalósítja az  $f$  társadalmi választási függvényt?*

Lássunk most néhány fogalmat! Mint tudjuk, egy  $g$  mechanizmus két összetevőből áll: a minden játékoshoz rendelt stratégiahalmazokból, illetve a stratégiaegyütteseken (stratégia-profilokon) értelmezett kimeneti

függvényből. A szabályok ismeretében a játékosok stratégiáik közül nyilván preferenciáik alapján választanak. Egy játékos domináns stratégiája számára a legkedvezőbb lehetőséget nyújtja, akármilyen stratégiát választ is a többi játékos. Egy stratégiaegyüttes *domináns egyensúlyi* stratégiaegyüttes, ha benne minden játékos domináns stratégiáinak egyike szerepel. Ez az egyensúlyfogalom igényli a legkevesebbet arra vonatkozóan, hogy a játékosoknak mit kell tudniuk egymás preferenciáiról és stratégiáiról. Ha egy lépésem a legjobb, függetlenül attól, hogy mit lépnek a többiek, nem kell törődnöm velük. Sajnos a domináns egyensúlyi stratégiaegyüttes létezése igen erős követelmény, legtöbb esetben nem számíthatunk teljesülésére.

Egy stratégiaegyüttes akkor *Nash-egyensúlyi*, ha minden játékos benne szereplő stratégiája a legjobb válasz a többiek megjátszott stratégiáira. (Részletesebben lásd Forgó Ferenc bevezető tanulmányát a 387. oldalon.)

Ha a mechanizmusban szereplő stratégiahalmazok mindegyike a logikailag lehetséges preferenciarendezések halmaza, azaz egy játékos egy stratégiája egy (nem feltétlenül valódi) rangsor bejelentését jelenti, akkor a mechanizmus *közvetlen*, ellenkező esetben *közvetett*. Általában a jelölésben is utalunk a mechanizmus közvetlen voltára, ekkor a *h* szimbólumot használjuk.

Ha egy *h* közvetlen mechanizmusban az „igazság”, azaz a valódi *R* preferencia-rangsor bejelentése egyensúlyi stratégia, és a *h* kimeneti függvény szerinti képe megegyezik a társadalmi választási függvény képével, azaz minden  $R \in R$  esetén  $h(R) = f(R)$ , akkor *igazságúen implementálja* azt.

A *Gibbard–Satterthwaite-tétel* ezek szerint azt mondja ki, hogy amennyiben a jelöltek száma legalább három, és teljesül a szavazók

szuverenitása, valamint minden logikailag elképzelhető preferenciaprofil megengedett, akkor az egyetlen *TVF*, amit domináns stratégiákban igazságúen implementálni lehet, a *diktatúra*.

Vajon ez az eredmény ténylegesen fontos számunkra? A valóságban ugyanis nagyon ritkán alkalmazunk olyan szavazási eljárást, amelyben a szavazók a teljes rangsorukat jelentik be. Gondoljunk csak meg, micsoda munka lenne a szavazatok összeszámolása és kiértékelése egy országgyűlési választáson, ahol a jelöltek száma meglehetősen magas, nem is beszélve a szavazók számáról. Képzeljük el, amint egy szavazóköri szavazatszámoló bizottság a több száz rangsor alapján kiszámítja a Condorcet-győztest (ha van) vagy a rangsoros szavazásban diadalmaskodót a körülbelül tíz potenciális jelölt közül. Nagyon hosszú időbe telne, amíg a választás eredményét megismernénk, a költség pedig az egekbe szökne. Épp ezért a gyakorlatban más szavazási eljárásokat alkalmaznak. Egy ilyen szavazási eljárással szemben természetes elvárás, hogy – mint az előbb – kifejezze a választók akaratát, és lehetőség szerint a legolcsóbb legyen. Most három ilyen viszonylag olcsó eljárást említünk: a relatív többségi eljárást, ahol a szavazók egy jelöltre szavaznak, és a legtöbb voksot megszerző jelölt a győztes, a kétfordulós relatív többségi eljárást, ahol a szavazók mindkét körben egy jelöltre szavaznak, de a második fordulóban csak az a két jelölt indulhat, aki az első fordulóban az első két helyen végzett, végül az ún. *jóváhagyó szavazást*, amelyben minden szavazó annyi jelöltre szavaz, amennyire csak akar, és a legtöbb voksot megszerző jelölt a győztes. E három eljárás – az előbbi szóhasználat szerint – közvetett mechanizmus. A relatív döntési szabályban például a szavazók stratégiahalmaza a jelöltek halma-

za, a jóváhagyó szavazásban a jelöltek tetszőleges részhalmazainak halmaza. A kimeneti függvények pedig mindkét eljárásban a legtöbb szavazatot kapott jelöltek adják.

Ennyi előkészítés elegendő ahhoz, hogy a számunkra most fontos eredményeket összegezhessük (lásd például Dasgupta et al., 1979; Maskin, 1985; Moore, 1992). Először az ún. *kinyilvánítási elv* eredeti alakját említjük meg (Gibbard, 1973). Ennek az elvnek több formája van, most mi a domináns egyensúly-stratégiákra vonatkoztatjuk. Az elv alap gondolata az, hogy ha egy mechanizmus implementálja az *f* társadalmi választási függvényt, akkor mindig létezik olyan közvetlen mechanizmus, amely igazságúen valósítja azt meg (ugyanabban az egyensúlyfogalomban). Ez most számunkra azért igen kellemetlen, mert ebből a Gibbard–Satterthwaite-tétel értelmében azonnal következik az, hogy egy tetszőleges *g* mechanizmus által domináns stratégiákban megvalósítható, implementálható társadalmi választási függvény szűkségképpen diktatórikus. Szavazási eljárásainkra vonatkozóan ez azt jelenti, hogy domináns egyensúlyuk, ha létezne is, „nem fejezi ki a választók akaratát”. Másképpen: van olyan preferenciaprofil, amely mellett legalább egyvalakinek megéri olyan jelöltre, jelöltekre szavazni, aki(k) nem az első a rangsorukban. Az első bevezető példánkban így cselekedett az ismert közíró. Az amerikai elnökválasztási példában, ha feltesszük, hogy a republikánus érzelmű szavazók mind Taftot, mind Rooseveltet jobbnak tartották, mint Woodrow Wilson, akkor megérte volna a republikánus szavazóknak egységesen szavazniuk. Kicsit általánosabban: a relatív többségi szavazás „manipulálható”, bizonyos preferenciaprofilokban érdemes olyan jelöltre szavazni, aki nem első a rangsorban. Természetesen igaz ez a kétfordulós re-

latív többségi eljárásra is. Ha úgy gondoljuk, hogy a rangsorunkban második jelöltnek nagyobb az esélye a második fordulóban a harmadik ellen, mint az elsőnek, akkor érdemes órá szavaznunk már az első fordulóban. A jóváhagyó szavazás esetében kicsit más a helyzet. Ha a jelöltek száma pont három, akkor minden szavazónak érdemes vagy a rangsorában első, vagy a rangsorában első két helyezettre szavaznia. Ha a jelöltek száma meghaladja hármat, akkor már érdekében állhat „hazudnia”.

Fordítsuk most figyelmünket a Nash-implementálhatóságra! Annak sajnos nincs esélye, hogy egy nem diktatórikus függvényt egy közvetlen mechanizmus igazságúen Nash-implementáljon, mert igen könnyen belátható, hogy ekkor ugyanez a mechanizmus domináns stratégiákban is igazságúen valósítja meg azt. A Gibbard–Satterthwaite-tétel értelmében ez utóbbi nem lehetséges. Marad tehát az a lehetőségünk, hogy egy közvetett mechanizmussal próbálkozzunk. Ahhoz, hogy egy társadalmi választási függvényt Nash-egyensúlyban megvalósítsunk, szűkségképpen monotonnak kell lennie (Maskin, 1999). Bizonyítható e mellett azonban az is, hogy amennyiben minden logikailag elképzelhető (szigorú) preferenciaprofil megengedett, akkor az a *TVF*, amelyet egy *g* mechanizmus Nash-egyensúlyban implementálni képes, igazságúen implementálható Nash- és így domináns egyensúlyban is (Dasgupta et al., 1979). Ezek szerint megint csak a diktatórikus társadalmi választási függvény implementálhatóságát sikerült igazolnunk.

Ha tehát a szavazók rangsorai tetszőlegesen alakulhatnak, és legalább három, ténylegesen megválasztható jelölt van, valamint meg akarjuk tartani demokratikus elveinket, nemigen kell törnünk a fejünket új játékszabá-

lyokon. Bele kell törödnünk a megváltoztathatatlanba: a szavazás bizonyos világgállapokban, azaz néhány preferenciaprofil mellett szükségképpen vezet rossz eredményre, ha egyensúlyfogalomként ragaszkodunk a domináns, illetve Nash-egyensúlyhoz.

Két irányban indulhatnánk tovább, hogy negatív eredményeink mellett pozitívakat is kapjunk. Az egyik a TVF-értelmezési tartományának szűkítése, azaz korlátozzuk a szóba jöhető preferenciaprofilok tartományát. A második az új egyensúlyfogalmak bevezetése. Noha mindkét irányban ígéretes eredmények születtek, nincs e helyütt módunk ezek részletes ismertetésére. Annál is inkább, mert az összképet csak árnyalják, de alapvetően nem

változtatják meg. Nincs szavazási eljárás, amely minden szempontból elfogadható lenne.

Végezetül arra is érdemes felhívni a figyelmet, hogy a stratégiai viselkedés nemcsak a szavazókat, hanem a jelölteket is jellemzi. Ahogy játékelméleti eszközökkel elemeztük a választókat, hasonlóképpen megtehetnénk ezt a jelöltekkel (Cox, 1987). Roger B. Myerson és Robert Weber (1993) modelljükben az összes szereplő, jelöltek és szavazók, stratégiai viselkedését és azok egyensúlyát egy általános modellbe helyezve vizsgálják.

Kulcsszavak: *implementációelmélet, manipulálhatóság, mechanizmustervezés, szavazáselmélet, társadalmi választási függvény*

#### IRODALOM

- Brams, Steven – Fishburn, Peter (2007): *Approval Voting*. 2<sup>nd</sup> ed. Springer Science+Business Media LLC., New York
- Cox, Gary (1987): Electoral Equilibrium under Alternative Voting Institutions. *American Journal of Political Sciences*. 31, 82–108.
- Dasgupta, Partha S. – Hammond, P. – Maskin, E. (1979): The Implementation of Social Choice Rules: Some General Results on Incentive Compatibility. *Review of Economic Studies*. 46, 181–216.
- Gibbard, Allan (1973): Manipulation of Voting Schemes. A General Result. *Econometrica*. 41, 587–601.
- Maskin, Eric (1985): The Theory of Implementation in Nash Equilibrium. In: Hurwicz, Leonid – Schmeidler, D. – Sonnenschein, H. (eds.): *Social Goals and Social Organizations. Essays in Memory of*

- Elisha Pazner*. Cambridge University Press, Cambridge, Mass., 173–204.
- Maskin, Eric (1999): Nash Equilibrium and Welfare Optimality. *Review of Econ. Studies*. 66, 23–38.
- Moore, John (1992): Implementation, Contracts and Renegotiation. In: Laffont, Jean-Jacques (ed.): *Advances in Economic Theory. VI<sup>th</sup> World Congress*. Vol. 1. Cambridge University Press, Cambridge, Mass. 182–282.
- Myerson, Roger B. – Weber, Robert (1993): A Theory of Voting Equilibria. *American Political Science Review*. 87, 102–114.
- Nurmi, Hannu (1987): *Comparing Voting Systems*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland
- Satterthwaite, Mark (1975): Strategy-Proofness and Arrow's Conditions: Existence and Correspondence Theorems. *Journal of Econ. Theory*. 10, 187–207.



## KOOPERATÍV JÁTÉKOK

Solymosi Tamás

egyetemi docens,  
Budapesti Corvinus Egyetem  
tamas.solymosi@uni-corvinus.hu

Amint az Forgó Ferenc bevezető tanulmányából is kiderül, a játékelméletet szokás két fő (egymástól szigorúan el nem választható) területre osztani attól függően, hogy az érdekeiket és a helyzet adta cselekvési lehetőségeiket felismerni képes racionális döntéshozók közötti konfliktus, avagy a hatékonyabb érdekérvényesítés által motivált együttműködés a vizsgálat tárgya. A másodiknak említett terület, a *kooperatív játékok* az olyan többszereplős döntési helyzetek matematikai modelljei, amelyekben a szuverén döntéshozók (játékosok) együttműködhetnek egymással, sőt erre vonatkozóan (valamilyen külső erő által számon kérhető) kötelezettséget is vállalhatnak. Ilyenkor a szereplők érdekei között fennálló ellentétek másodlagosak az együttműködésre készítő érdekazonosságokhoz képest. A nemkooperatív játékokban a játékosok közötti (teljes vagy részleges) konfliktuson van a hangsúly, a kooperatív modellekben viszont a kölcsönös előnyök kiaknázása sokkal fontosabb a játékosok számára, mint az együttműködésük hozadékának elosztásakor közöttük fellépő szembenállás.

A kooperatív modellek sajátossága, hogy nem részletezik a játék időbeli lefolyását, a szereplők döntési lehetőségeit, az információk elérhetőségét, az alkufolyamatokat, hanem csak az egyes társulások (koalíciók) által

elérhető kimeneteleket adják meg. A játékelméleti modellek közül a kooperatív alaptípus a legkevésbé részletező, ebben tekintünk leginkább „madártávlatból” a döntési helyzetre. Ez gyakran szükségszerű is ahhoz, hogy elemzhető modellt kapjunk. Ha „alább szállnánk”, a nagyobb felbontásban kirajzolódó részletek hamar kezelhetetlenül bonyolulttá tehetnék a modellt, „nem látnánk a fától az erdőt”. Például, ha egyébként konkurens vállalatok egy új technológia közös kifejlesztését fontolgatják, akkor az egyes társulások által és ezeken belül a számukra elérhető előnyök meghatározásán alapuló elemzés még megvalósítható feladat lehet, de a képlékeny helyzet miatt egy részletesebb stratégiát eredményező, strukturáltabb modell felépítése már nehezen elképzelhető.

Az idézett dolgozatban arról is szó esett, hogy a kooperatív modellek két alapkategóriába sorolhatók, aszerint, hogy létezik-e vagy sem egy olyan, az összes szereplő számára közös értékmérő („pénz”), ami lehetővé teszi az egyéni hasznosság-skálák közötti egy egybeni átválthatóságot, és ezáltal egyrészt egy koalíció „értékének” meghatározhatóságát, másrészt ennek az elérhető összhazonnak a tagok közötti tetszőleges eloszthatóságát. Amint az a nemkooperatív játékoknál is igaz, a hasznosságok összehasonlíthatósága itt is