

például csak 1979-ben bizonyította be *Richard Schoen* és *Shing-Tung Yau*, továbbá 1981-ben más módszerrel *Edward Witten*. Az energia és impulzus természetének problémája az általános relativitáselméletben még ma sem tekinthető teljesen lezártnak. A fő nehézség az, hogy a gravitációs mezőnek nincs egyértelmű energia-impulzus tenzora, továbbá az általános relativitáselméletben nincsenek egyértelmű globális idő- és téreltolási szimmetriák. A gravitációs energia és impulzus legrégebbi definícióiban különféle pszeudotenzorok szerepelnek; egy gravitációs energia-impulzus pszeudotenzort maga Einstein is bevezetett. Egy másik lehetséges megközelítés, hogy az energia- és impulzusáramok helyett csak véges térrészekhez tartozó, azaz kvázilokális, illetve teljes energiát és impulzust próbálunk meg értelmezni. Magyarországon ezen a területen *Szabados László Benő* ért el jelentős eredményeket, többek között a zárt univerzumok teljes tömegére, illetve az aszimptotikusan de Sitter-tér-időkben bevezethető energiára és impulzusra vonatkozóan [2–5]. A gravitációs energia-impulzus problémájáról részletesebb ismertető található Szabados László nemrég megjelent cikkében [6].

Bár a fizika sok fontos differenciálegyenlete előáll Euler–Lagrange-egyenletként, természetes módon felvetődik az a kérdés is, hogy általában mit lehet mondani a differenciálegyenletek szimmetriáiról és megmaradó mennyiségeiről. A huszadik század második felében ezt a problémát is alaposan megvizsgálták. A Noether-tételben megfogalmazotthoz hasonló megfelelés a szimmetriák és a megmaradó áramok között ugyan általában nem áll fenn, de használható szisztematikus módszereket sikerült találni a megmaradó áramok és a szimmetriák megkeresésére.

Noether a variációs problémák szimmetriáinak és megmaradó áramainak tanulmányozása után visszatért az absztrakt algebrahoz, és pályafutásának további részében ezen az éppen erősen fejlődő területen ért el jelentős eredményeket, amelyek által neves és elismert matematikussá vált. 1933-ban *Hitler* hatalomra jutása után zsidó származása miatt sok más tanárral együtt őt is elbocsátották a Göttingeni Egyetemről. El kellett hagynia hazáját, az Egyesült Államokba emigrált, ahol a Philadelphia mellett található Bryn Mawr College tanára lett, és Princetonban is tartott előadásokat. Amerikában azonban csak rövidebb ideig volt lehetősége dolgozni, mivel 1935-ben, egy műtétet követő komplikációk következtében elhunyt.

Irodalom

1. E. Noether: Invariante Variationsprobleme. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse 1918* (1918) 235, https://www.digizeitschriften.de/en/dms/toc/?PID=PPN252457811_1918
2. L. B. Szabados: Mass, gauge conditions and spectral properties of the Sen-Witten and 3-surface twistor operators in closed universes. *Class. Quant. Grav.* 29 (2012) 095001.
3. L. B. Szabados: On the total mass of closed universes. *Gen. Rel. Grav.* 45 (2013) 2325–2339.
4. L. B. Szabados: On the total mass of closed universes with a positive cosmological constant. *Class. Quant. Grav.* 30 (2013) 165013.
5. L. B. Szabados, P. Tod: A positive Bondi-type mass in asymptotically de Sitter spacetimes. *Class. Quant. Grav.* 32 (2015) 205011.
6. Szabados B. László: A gravitációs energia-impulzusról. *Fizikai Szemle* 68/6 (2018) 183.
7. Y. Kosmann-Schwarzbach: *The Noether Theorems: Invariance and Conservation Laws in the Twentieth Century*. Springer (2010)
8. P. J. Olver: *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. Springer (2000)
9. *Encyclopaedia Britannica*

CSOPORTELMÉLET REAKTORFIZIKAI ALKALMAZÁSAI

Makai Mihály

BME Nukleáris Technikai Intézet és
MTA Energetudományi Kutató Intézet

A csoportelmélet sohasem volt népszerű. *Slater* [1] az alábbiakat írta egy, a kizárási elvről folytatott vita kapcsán: „Ez volt az a pont, amikor Wigner, Hund, Heitler és Weyl belépett a képbe a maguk »Gruppenpest«-jével, a csoportelmélet pestisével, ahogyan néhány elégedetlen nevezte, akik sohasem tanultak csoportelmé-

letet iskolai tanulmányaik során.” Az évtizedekkel ezelőtti vita újra felbukkant *P. Weinberger* [2] cikkében.

Az idő azonban megtette a magáét, ma már a csoportelmélet hasznát, még a reaktorfizikai alkalmazásokban is – igaz néha vitatható formában – a szakma elfogadta. Jelen dolgozat fel kívánja hívni a figyelmet a csoportelméleti módszerek használhatóságára a reaktorfizika numerikus modelljeiben.

Azonban még évtizedek múltával is megállapítható, hogy a numerikus problémákkal foglalkozók jól ismerik a numerikus módszereket, alkotó módon alkalmazzák azokat, viszont a modern algebrát nem használják. Akik viszont a csoportelméletben járatosak, nem tudják, miként hasznosítható tudásuk a numerikus módszerek területén. A szerző célja annak bemutatása, hogyan használható a csoportelmélet numerikus módszerekben.



Makai Mihály az MTA doktora, fizikus diplomáját az Eötvös Loránd Tudományegyetemen szerezte 1970-ben. A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Nukleáris Technikai Intézetének professzor emeritusa. Két angol és két magyar nyelvű monográfia, illetve könyv és további több mint 130 tudományos publikáció szerzője.

A megoldandó feladat

A feladat meghatározni a $\Psi(\mathbf{r})$ neutronfluxust az $\mathbf{r} \in V$ tartományban. A V tartomány ∂V peremén az alábbi homogén peremfeltételt írjuk elő: $\mathbf{B}\Psi(\mathbf{r}) = 0$, ahol \mathbf{B} adott lineáris operátor. A neutronfluxus kielégíti az alábbi lineáris egyenletet:

$$\mathbf{A}(p)\Psi(\mathbf{r}) = \lambda\Psi(\mathbf{r}), \text{ ha } \mathbf{r} \in V; \quad (1)$$

$$\mathbf{B}\Psi(\mathbf{r}) = 0, \text{ ha } \mathbf{r} \in \partial V.$$

Itt \mathbf{A} és \mathbf{B} lineáris operátor, az \mathbf{A} operátorban szereplő p paramétert úgy választjuk, hogy a homogén (1) egyenletnek legyen nem azonosan nulla megoldása. A $\Psi(\mathbf{r})$ megoldást az alábbi iterációval határozzuk meg: kiindulunk egy $\Psi_0(\mathbf{r})$ kezdeti eloszlásból, a k -ik iterációból meghatározzuk Ψ_{k+1} -et:

$$\mathbf{A}(p)\Psi_{k+1}(\mathbf{r}) = \lambda\Psi_k(\mathbf{r}), \quad (2)$$

ahol $\mathbf{r} \in V$ és $k = 1, 2, 3, \dots$. A peremfeltételt az alábbi módon kezeljük. Felosztjuk a V tartományt $N_b \gg 1$ egybevágó részre, a részeket megszámozzuk. Két szomszédos tartomány közös része belső határ, amin a $\Psi(\mathbf{r})$ megoldásnak és normális deriváltjának – pontosabban a neutronáramnak – folytonosnak kell lennie. A külső határokon peremfeltételt írunk elő, például rögzítjük a Ψ fluxus és a $\partial\Psi$ normális irányú derivált következő kifejezését:

$$\mathbf{B}\Phi(\mathbf{r}_b) = \Phi(\mathbf{r}_b) + \gamma\partial\Phi(\mathbf{r}_b) = 0, \quad (3)$$

ahol $\mathbf{r}_b \in V$. Itt γ adott paraméter, $\partial\Psi$ normális irányú derivált a peremen. Az $\mathbf{A}(p)$ operátor p paraméterét úgy kell megválasztani, hogy az (1) egyenleteknek legyen nem azonosan nulla megoldása.

Egy iterációs lépés során a V -t kitöltő minden rész-térfogatot végig kell az iterációnak járni. Belső határokon folytonossági feltételeket írunk elő, külső határokon a (3) peremfeltételeket. Amennyiben a k -ik lépésben $(\Psi_{k+1} - \Psi_k)/\Psi_k$ elég kicsi az egész V tartományban, az iteráció konvergál. Az alábbi feltételek kiemelten fontosak az eljárás alkalmazhatósága szempontjából:

1. Az iterációban szereplő \mathbf{A} és \mathbf{B} operátorok lineárisak.

2. A numerikus módszerekben az egyenletek közelítő formában vannak felírva.

3. A fenti leírásban nem szerepelnek visszacsatolások – például az \mathbf{A} operátorban szereplő mennyiségek nem függenek paraméterektől (mint a fűtőanyag és a moderátor hőmérséklete) –, amit egy újabb iterációval kellene figyelembe venni.

Reaktorfizikai alkalmazásokban az $\mathbf{A}(p)$ operátor két tag összege: egyrészt tartalmazza a kifolyást, amit most $D\nabla^2$ alakba írunk, ahol D a diffúziós állandó, másrészt a reakciógyakoriságokat (szórás, abszorpció) amit egy általános Σ hatáskeresztmetszet-mátrixszal írunk le. Mindkét tag a Ψ neutronfluxusra hat. A megoldásban a

$$D^{-1}\Sigma\mathbf{t}_i = \lambda_i^2\mathbf{t}_i \quad (4)$$

– ahol $i = 1, \dots, N_G$ – operátor λ_i sajátértékeit és \mathbf{t}_i sajátvektorait fogjuk használni.

A (4) egyenlet analitikus megoldása megadható $\exp(\lambda_i\xi\mathbf{r})$ alakú tagok összegeként, ahol $|\xi| = 1$. Megfelelő súlyokkal az exponenciális függvényekből (4) egzakt megoldása [6]:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^G \int_{|\xi|=1} \mathbf{t}_i(\xi) \exp(\lambda_i\xi\mathbf{r}) d\xi. \quad (5)$$

Itt G az energiacsoportok száma. (5)-ből következik, hogy D és Σ meghatározza ξ abszolút értékét, de irányát nem.

Rövid csoportelmélet

Amennyiben az (1) és (2) egyenletben szereplő \mathbf{A} és \mathbf{B} lineáris operátorokhoz létezik olyan \mathbf{P} operátor, amelyre fennáll

$$\mathbf{P}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{P} \text{ és } \mathbf{P}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{P}, \quad (6)$$

akkor \mathbf{P} a vizsgált feladat *szimmetriája*. Egy numerikus probléma leírásához az $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, V)$ hármas szükséges és elegendő.

Ha $\mathbf{P}_1\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{P}_1$ és $\mathbf{P}_2\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{P}_2$, akkor $(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2)\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2)$. Ez definiál egy műveletet (szorzás), a lehetséges szimmetriák *csoport* nevű struktúrát alkotnak.

Legyen G véges csoport, amelynek elemei g_1, g_2, \dots, g_N , ekkor:

- G -nek van egységeleme, amit e -vel jelölünk: $ge = eg = g$.

- Minden $g \in G$ elemnek van inverze, jele g^{-1} , amire $gg^{-1} = g^{-1}g = e$.

- G közös elemet nem tartalmazó *konjugált osztályokra*, röviden *osztályokra* bontható. Az $a \in G$ elemhez tartozó konjugált osztály a $ga g^{-1}$ elemekből áll, itt g a G csoport minden elemén végigfut.

- GN darab mátrixszal ábrázolható. A mátrix spúrját *karakternek* nevezik. Egy osztály mátrixainak spúrja azonos.

- A karakterek négyzet alakú mátrixba rendezhetőek. Az oszlopok a konjugált osztályokat, a sorok az irreducibilis altérket mutatják.

- A karaktertábla i -ik sorának j -ik eleme megadja az i -ik irreducibilis j altér mátrixainak karakterét (spúrját).

A felsorolt tulajdonságok lehetővé teszik, hogy egy \mathbf{P} csoportelem hatását az $f(\mathbf{r})$ függvényre az alábbi módon adjuk meg:

$$\mathbf{P}f(\mathbf{r}) \equiv f(\mathbf{O}^{-1}\mathbf{r}), \quad (7)$$

azaz, egy \mathbf{P} operátor hatását az \mathbf{r} helykoordinátákra – egy lineáris transzformációval – az \mathbf{O} mátrixszal írhatjuk le. Ezzel a szimmetriákat izomorfiába hoztuk a

koordinátatranszformációkat leíró mátrixokkal. Ez adja az alábbi definíciókat:

- A \mathbf{P} operátor a V térfogat szimmetriája, ha \mathbf{P} a V térfogatot önmagába képezi le.

- Orbitnak nevezzük egy adott \mathbf{r} pontnak a csoportelemek transzformációi alatt kapott \mathbf{r}_i pontok halmazát.

- V/G -vel jelöljük az orbitok halmazát, ami egy ekvivalenciarelációt definiál V pontjai között: az x és y pontok ekvivalensek, ha a G csoport azonos orbitjának elemei.

- Legyen az $\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2, \dots, \mathbf{O}_n$ mátrixok halmaza zárt a mátrixszorzás műveletére nézve. Az $\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2, \dots, \mathbf{O}_n$ mátrixok a G csoport egy ábrázolását adják, ha a G csoport minden eleme előállítható az \mathbf{O}_i mátrixok segítségével az alábbi módon: $\mathbf{O}_i \mathbf{O}_j \mathbf{O}_i^{-1}$, ahol $1 \leq i \leq n$. Itt az \mathbf{O}_j mátrixok minden osztályból választandók.

- Egy reprezentációt (ábrázolást) reducibilisnek nevezünk, ha minden $\mathbf{O}_i \in G$ mátrix előállítható

$$\mathbf{O}_i = \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ 0 & C_i \end{pmatrix}$$

alakban. Ellenkező esetben az ábrázolás irreducibilis.

- Minden csoporthoz hozzárendelhető egy karaktertábla, ami négyzet alakú, sorainak és oszlopainak száma n , ami a csoport konjugált elemosztályainak száma.

- A karaktertábla segítségével kivetíthető egy adott vektorból vagy függvényből annak minden irreducibilis komponense.

- Az irreducibilis komponensek ortogonálisak egymásra.

Összefoglalva: egy alakzat szimmetriái csoportot alkotnak, a csoport elemeinek hatása függvényekre a függvény független változóira ható mátrixokkal adható meg.

A csoportelmélet alkalmazása

Amennyiben a V térfogat szimmetrikus, V szimmetriacsoportja segítségével a $\Psi(\mathbf{r})$ megoldást fel lehet bontani egymásra ortogonális $\phi_s(\mathbf{r})$ irreducibilis komponensekre.¹ A továbbiakban ezeket *irrepeknek* fogjuk nevezni. Legyen

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{s=1}^{N_c} \phi_s(\mathbf{r}), \quad (8)$$

és az irredek ortogonalitása miatt

$$(\phi_s; \phi_{s'}) = \delta_{s,s'}, \quad (9)$$

a skalárszorzatban az integrálás a helyváltozóra történik.

A (4) egyenlet megoldására a (2) iterációt szokás használni [4, 6]. Az iteráció k -ik lépésében a megoldást jelölje $\Psi_k(\mathbf{r})$ és módosul (8) is mert a $k+1$ -ik iterációs lépés eredményét a $\phi_{sk}(\mathbf{r})$ függvényekből számítjuk:

$$\Psi_{k+1}(\mathbf{r}) = \sum_{s=1}^{N_c} \phi_{sk}(\mathbf{r}). \quad (10)$$

Bontsuk fel az (5) egyenletben szereplő ismeretlen $f_j(\mathbf{r})$ függvényeket a (8)-ban szereplő $\phi_s(\mathbf{r})$ irrepekre. Az utóbbiak lineárisan függetlenek, ezért az iteráció minden ϕ_s irrepre külön végrehajtható:

$$\phi_{sk+1}(\mathbf{r}) = \lambda_s \phi_{sk}(\mathbf{r}), \quad (11)$$

ahol $s = 1, 2, \dots$. Vegyük észre, hogy a lineárisan független ϕ_s irrepek nem keverednek az iteráció során, noha az egyes irrepek konvergenciája λ_s -től függ, ami minden irrepre eltérő lehet.

1. Megoldandó a következő homogén peremérték-probléma:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(p) \Psi(\mathbf{r}) &= 0, \text{ ha } \mathbf{r} \in V; \\ \mathbf{B} \Psi(\mathbf{r}) &= 0, \text{ ha } \mathbf{r} \in \partial V. \end{aligned} \quad (12)$$

A fenti probléma homogén. Megismételjük, hogy az \mathbf{A} operátorban szereplő p paramétert úgy kell megválasztani, hogy a homogén feladatnak legyen nemtriviális megoldása.

2. Ha léteznek olyan \mathbf{P} operátorok, amelyekre fennáll

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\mathbf{A} &= \mathbf{A}\mathbf{P} \text{ és } \mathbf{P}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{P}, \\ \text{valamint } \mathbf{P}V &= V, \end{aligned} \quad (13)$$

akkor a \mathbf{P} operátorok csoportot alkotnak.

3. A csoporthoz tartozó karaktertábla segítségével bármely $\Psi(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in V$ függvény felbontható ortogonális irredekre:

$$\Psi^\alpha(\mathbf{r}) = \frac{l_\alpha}{|G|} \sum_{g \in G} \chi^\alpha(g)^* \Psi(\mathbf{r}), \quad (14)$$

ahol α az irred azonosítója, $\chi^\alpha(g)$ a karaktertábla α sora g elemének megfelelő érték.

Az $f_j(\mathbf{r})$ függvények a $\Psi(\mathbf{r})$ megoldások egy orbiton felvett értékeinek lineáris kombinációja:

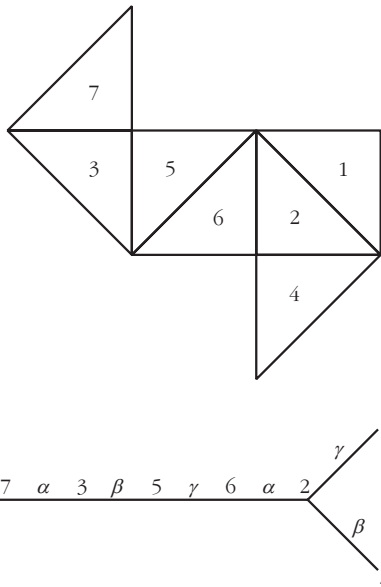
$$f_i(\mathbf{r}) = \sum_k \gamma_{ik} \Psi(\mathbf{r}_k), \quad (15)$$

ahol a k index az orbitok pontjainak sorszáma, γ_{ik} a karaktertábla, i a karaktertábla sorait indexeli.

Aszimmetrikus struktúrák

T. Sunada [8] felvetette, hogy csoport előállítására felhasznált eszközöket tágabban is lehet értelmezni: a csoport objektumok olyan halmaza, amelyek közül bármelyik kettőt egy művelettel (ragasztás) össze lehet kapcsolni. Egy objektum szimmetrikus, ha úgy

¹ Itt az ortogonalitás jelentése: $(\phi_s(\mathbf{r}), \phi_{s'}(\mathbf{r})) = 0$.



1. ábra. Szabálytalan alakzat 7 egybevágó háromszögből.

transzformálható, hogy közben az objektum nem változik. C. Gordon és D. Webb [3] három csoportelemből (α , β és γ) hozott létre egy hételemű objektumot, jelölje ezt G . Legyenek G alkotóelemei az α , β és γ szorzatai, ahol a szorzat ragasztást jelent.

A csoport elemeit azzal írjuk le, hogyan hatnak az alábbi hételemű halmazra: $X = [1, 2, \dots, 7]$. G egy elemét jelölje g , és g hatása G -re legyen G elemeinek egy permutációja. G hatását az X halmazon egy gráffal lehet leírni (Cayley-gráf). Gordon és Webb [3] a G csoport leírására az alábbi „ragasztás” technikát javasolta:

1. Az alapelem legyen egy poligon, annyi oldalall, ahány alkotóelemet használunk G felépítéséhez (esetünkben három). A poligon oldalait jelöljük az alkotóelemeknek megfelelően α -val, β -val és γ -val.

2. A gráf annyi elemből álljon, ahány eleme van az X halmaznak. Két adott elemnek egy közös oldala lehet, a közös oldal kizárólag a két érintkező háromszög azonos oldala lehet: α , β vagy γ .

3. Belső oldal: két háromszög közös oldala. Külső oldal: nincs olyan háromszög, amelynek lenne közös oldala az adott határon. Egy háromszögnek legfeljebb három belső oldala lehet, az 1. ábrán egyetlen ilyen van, a „2” elem.

4. Az 1. ábra alsó része mutatja az elemek „szorzatait”. A „7” és „3” elemeket egy α -típusú él köti össze, a „3” és „5” elemeket egy β -típusú él stb.

A Cayley-gráf ismeretében az 1. ábrához is lehet egy csoportot rendelni, némi munkával meg lehet találni a projektorokat, amelyekkel az ortogonális komponenseket ki lehet vetíteni. Ezek segítségével a numerikus módszer hatékonyabbá tehető.

Kuriózum: lehet konstruálni olyan, egymással nem ekvivalens alakzatokat, amelyeken a

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{r}) = \lambda \Psi(\mathbf{r}) \quad (16)$$

egyenlet minden λ sajátértéke azonos.

Az 1. ábrán lévő felső alakzaton a 7 háromszöget megszámoztuk. Az alakzatot egybevágó háromszögek alkotják, ezek éleit α , β és γ jelöli. Két háromszögnek csak egy közös oldala lehet, ezért az oldal jelölése felhasználható az alakzat felépítéséhez. Az ábra alsó részén látható alakzat elemeit számok mutatják, a közös éleket – amelyek α , β és γ lehetnek – a rajzon szintén feltüntettük.

A konvergencia buktatói

A numerikus módszerek egyenletrendszert származtatnak a keresett függvényben szereplő együtthatókra. A próbafüggvényeket (a közelítő függvénytér bázisait) úgy kell megválasztani, hogy megfelelően írják le a fizikai folyamatokat, de arra is ügyelni kell, hogy a kapott egyenleteket hatékonyan tudjuk megoldani.

A neutrontranszport-egyenlet megoldása során a VARIANT program [4] az alábbi módszert használja:

- A megoldás V térfogatát egybevágó V_i – $i = 1, \dots, N$ – régiókra osztja fel, ezekben az anyagi tulajdonságok helytől függetlenek.

- A keresett neutronfluxusra V_i határán közelítést alkalmaz, két szomszédos elem határán megköveteli a megoldás folytonosságát.

- A V_i régió belsejében is közelítést alkalmaz, ennek alapján számítja a reaktorfizikában kiemelt fontosságú reakciógyakoriságokat.

Ez a közelítési mód a numerikus módszerek körében tipikusnak mondható. Azt találták, hogy a VARIANT program algoritmusai csak akkor konvergálnak, ha a felületen megadott lineáris közelítéshez a térfogat belsejében legalább hatodfokú közelítést társítanak, ami a szerzők szerint érthetetlen, programhibára gyanakodtak.

A feladat vizsgálatához elemezzük a közelítést! Először leszögezzük, ha a keresett megoldást lineárisan független alterekben vizsgáljuk, akkor az iterációnak

| 1. táblázat | | | | | |
|--|---|-----|-------------|---------|----------------------|
| A legfeljebb negyedfokú polinomok irreducibilis komponensei (négyzet, azaz C_{4v} csoport esetén) | | | | | |
| polinomfok /i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 1 | – | $x^2 + y^2$ | – | $x^2 y^2, x^4 + y^4$ |
| 2 | – | – | – | – | $x^3 y - y^3 x$ |
| 3 | – | – | $x^2 - y^2$ | – | $x^4 - y^4$ |
| 4 | – | – | xy | – | $x^3 y + y^3 x$ |
| 5 | – | x | – | x^3 | – |
| 6 | – | – | – | xy^2 | – |
| 7 | – | – | – | $x^2 y$ | – |
| 8 | – | y | – | y^3 | – |

minden ilyen altérben biztosítania kell a konvergenciát, hiszen a lineáris függetlenség miatt az alterek között nem léphet fel kompenzáció, azaz olyan helyzet, hogy egy altérben a konvergencia hiányát más alterek kombinációi pótolják. Ezután az a kérdés, hogy ilyen lineárisan független altereket miként lehet egyszerűen találni. Erre a választ a diszkretizált térfogat egy nódusának automorfizmusai szolgáltatják. Ez az automorfizmus-csoport (8) szerint egy felosztást generál a közelítő függvények által kifeszített téren, és a konvergencia minden egyes altéren fenn kell álljon. Vizsgáljuk meg a konvergenciát az egyes altereken [5].

A számítás úgy történik, hogy az előző nódus kimenő áramából meghatározzuk a bemenő áramokat. Amennyiben a peremen lineáris függvényekkel közelítjük a bemenő áramokat, minden altérben nemnulla járulékat kapunk. Ezután megoldjuk az egyenletet a tartomány belsejében, de ott is adott fokszámú polinomok szerint fejtjük ki a megoldást. Amennyiben a közelítő polinomok nem teszik lehetővé, hogy a megoldásnak minden altérben legyen el nem tűnő komponense, az eljárás nem konvergálhat. Az 1. és 2. táblázatból megállapítható, hogy a térfogat belsejében alkalmazott polinomok fokszámának növelésével elérhető, hogy minden lineárisan független altérben legyen el nem tűnő komponens, ám ehhez legalább hatodfokú polinom kell szabályos hatszög alakú nódusokban, és legalább negyedfokú polinom négyzet alakú nódusokban.

Az ismertetett módszer egyúttal útmutatást is ad, hogyan lehet egy adott közelítést javítani, illetve alkalmassá tenni más geometria esetére.

2. táblázat

A legfeljebb negyedfokú polinomok irreducibilis komponensei (hatszög, azaz C_{6w} csoport esetén)

| polinomfok /i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---------------|---|--------|-------------|-----------------|---------------------------------|
| 1 | 1 | – | $x^2 + y^2$ | – | $(x^2 + y^2)^2$ |
| 2 | – | – | – | – | – |
| 3 | – | – | – | $y(y^2 - 3x^2)$ | – |
| 4 | – | – | – | $x(x^2 - 3y^2)$ | – |
| 5 | – | x, y | – | $x(x^2 + y^2)$ | – |
| 6 | – | x, y | – | $y(x^2 + y^2)$ | – |
| 7 | – | x, y | – | – | – |
| 8 | – | x, y | – | – | – |
| 9 | – | – | $x^2 - y^2$ | – | $(5x^4 - 6x^2y^2 - 3y^4), x^3y$ |
| 10 | – | – | xy | – | y^3x |
| 11 | – | – | – | – | $6x^2y^2 - (x^4 + y^4)$ |
| 12 | – | – | – | – | – |

Irodalom

1. J. C. Slater: *Solid State and Molecular Theory: A Scientific Bibliography*. Wiley, NY, New York (1975)
2. P. Weinberger: Arthur Cayley and the "Gruppen Pest". *Phil. Mag.* 95 (2015) 3039–3051.
3. C. Gordon, D. Webb: *You Can't Hear the Shape of a Drum*. *American Scientist* 84 (1996) 46–55.
4. G. Palmiotti et al.: VARIANT. ANL-95/40, Argonne National Laboratory, Argonne, 1995.
5. M. Makai, Y. Orehwa: Symmetries of boundary value problems in mathematical physics. *J. Math. Phys.* 40 (1999) 5247–5263.
6. M. Makai: Symmetries Applied to Reactor Calculations. *Nucl. Sci. Eng.* 82 (1982) 338–353.
7. M. Makai: Plane waves and Response Matrices. *Ann. Nucl. Energy* 19 (1992) 715–736.
8. T. Sunada: Riemannian coverings and isospectral manifolds. *Ann. of Mathematics* 121 (1985) 169.

Jobb egy mentőötlet mint öt mentő egylet

– írta Karinthy Frigyes az egyletistápolás margójára.

Most Társulatunknak lenne szüksége egyletmentő ötletekre!



Ezek az ötletek nem vesznek el,

ha a <http://forum.elft.hu>

linken, az ELFT stratégiai vitafórumán adjuk elő.

