

válaszolására irányuló, még folyamatban lévő (a dekoherencia és a hullámcsomag kollapszusa tárgykörkbe eső) elméleti próbálkozások ismertetésétől. Ehelyett inkább a kísérletek előfeltételét képező kvantumhűtés különböző módszereibe ad betekintést. A kvantummechanika egy szinte szemléletes oldalát ismerjük meg és egyszer csak elkezdünk a dolgon önállóan gondolkodni.

Heti négy órás kurzust és két óra gyakorlatot feltételezve a könyv anyagának nagy része előadható egy félév alatt. Ahol az egész elméleti fizikára csak két félév jut, ott talán meg lehetne kísérteni, a mechanikáról és elektrodinamikáról a kvantummechanika és a statisztikus fizika javára lemondani (az érdeklődés és a színvonal növekedésének reményében).

Geszti *Kvantummechanikája* egy gondosan kidolgozott tankönyv, amely kibontakoztatja a tárgy lebilincselő vonzerejét. A szerzőt megilleti a diákság, az egész hazai fizikustársadalom lelkes köszönete. Reméljük, sikeres példája követőkre talál.

Utóirat. Aki teheti, olvassa Geszti könyvét párhuzamosan *Patkós András Bevezetés a kvantummechanikába: 6 előadás Feynman modorában* című munkájával (Typotex, Budapest, 2012). Fizika ugyan csak egy van, de ezt az egyet a fizikusok (esetenként nagyon is) egyéni gondolkodás- és beszédmódja színes sokasággá képezi le. A két mű párhuzamos olvasása elősegíti mind a teljesebb tárgyismeret elsajátítását, mind az önálló gondolkodás kialakulását.

Hajdu János (Köln/Budapest)

A FIZIKA TANÍTÁSA

KÁOSZ EGY TÁLBAN

Tóthné Juhász Tünde – Karinthy Frigyes Gimnázium (Budapest)
Gócz Éva – Lónyai Utcai Református Gimnázium

„Ha valamit nem értesz, írd róla tanulmányt!”

(*Buza László*)

Még mielőtt az olvasó nagyon megijedne, szeretnénk leszögezni, hogy a fenti idézet nem a szerzők hozzáértését hivatott minősíteni, sokkal inkább egyfajta módszertani útmutatás kíván lenni.

Az ELTE Fizika Doktori Iskolájának előadásait látogatva meglepetten tapasztaltuk, hogy a kaotikus mechanika nevű tantárgy vizsgafeltételeként mindenkinek saját szimulációt kellett készítenie egy tetszőlegesen választott kaotikus példából. Eleinte hitetlenkedve fogadtuk, hogy mi erre valaha is képesek leszünk, azonban a szimuláció során szerzett tapasztalatok arra sarkalltak minket, hogy kollégáinknak is megmutassuk, a káosz megértéséhez egyetlen jó út vezet: a kísérletezés, a saját felfedezés élménye.

Mindehhez oktatási segédanyagot is készítettünk, amely egy nagyon hasznos, ingyenesen letölthető program – a Dynamic Solver – használatának segítségével bemutatja, hogy egyszerű szimulációval miként vizsgálhatjuk a bonyolult tálban mozgó golyó kaotikus mozgását. Az oktatási segédanyag – amely lényegében összefoglalja, hogyan írhatunk be különböző differenciálegyenleteket a programba, valamint milyen grafikus beállításokra van szükség a szimuláció futtatásához – letölthető az ELTE Fizika Tanítása Doktori Iskola honlapjáról [1].

A kaotikus mozgások elméleti hátterét természetesen nem kívánjuk részletesen tárgyalni, erre jó szak-

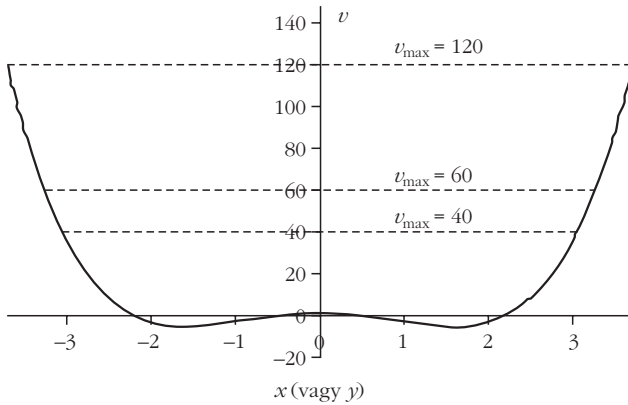
irodalom áll rendelkezésre [2] és számos cikk foglalkozik a téma középiskolai tanításával is, azonban a legfontosabb vonásokat bemutatjuk egy konkrét példán, a bonyolult tálban mozgó golyó esetén.

Milyen a bonyolult tál?

Kaotikus mozgás vizsgálatához szabálytalan mozgásra van szükségünk. Szabálytalanságon itt azt értjük, hogy a vizsgált mozgás tetszőlegesen hosszú ideig sem ismétli önmagát.

Matematikailag nézve minden, legalább három elsőrendű, nemlineáris, közönséges differenciálegyenlettel leírható rendszer viselkedése általában kaotikus [3]. Ez a megfogalmazás persze nagyon messze áll attól, amit középiskolás diákoknak akár szakkör keretein belül meg lehet tanítani, de ezt leegyszerűsíthetjük számukra úgy, hogy például az egydimenziós gerjesztett és a kétdimenziós súrlódásmentes mozgások döntő többsége kaotikus. Az általunk bemutatott példa ez utóbbi osztályba tartozik, itt azonban figyelni kell arra, hogy ha az energián kívül létezik még egy megmaradó mennyiség, akkor az megakadályozza a kaotikus mozgás kialakulását.

Tálban mozgó golyó esetén (súrlódásmentes esetben) – ahol maga a tál alakja határozza meg a potenciált – tehát azt kell megkövetelnünk, hogy a tál legyen „bonyolult”, azaz ne legyen forgásszimmetrikus (1. és 2. ábra). Ilyenkor ugyanis a tál alakja centrális



1. ábra. A tál x -tengely (vagy szimmetria miatt y -tengely) menti metszete. A vízszintes segédvonalak a $V_{\max} = 40$, $V_{\max} = 60$ és $V_{\max} = 120$ esetekben mutatják a tál peremét.

potenciálnak felelne meg, ahol a perdület megmaradása miatt a pályák egyszerűek lennének éppen úgy, ahogy a centrális erőterben mozgó bolygó példájában is, így nem alakulhatnak ki szabálytalan mozgás [4].

Az általunk vizsgált (nem forgásszimmetrikus) potenciálfüggvény a következő:

$$V(x, y) = x^4 + y^4 + x^2 y^2 - 5x^2 - 5y^2 - x y.$$

Alkalmasan megválasztott (dimenziótlan) egységekben a $V = \text{konstans}$ görbe egyben a tál alakja is.

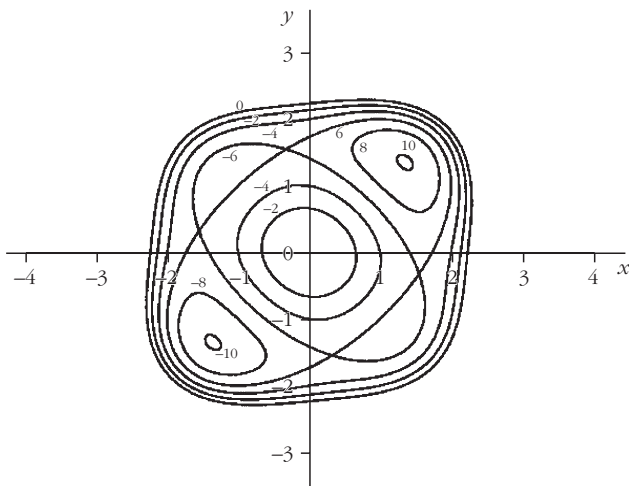
A golyó mozgásegyenletei

A golyó mozgását leíró differenciálegyenletek – abban az esetben, ha a tál nem túl meredek – egyszerűek:

$$\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \text{ valamint } \ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}.$$

Súrlódásmentes esetben – az energiamegmaradás miatt – a golyó potenciális és mozgási energiájának

2. ábra. A tál közepének szintvonalai (ekvipotenciális görbéi). A szintvonalakat csak a $[-10; 0]$ intervallumon rajzoltuk meg, mert ezen a részen (a tál belsejében) látszik legjobban, hogy a tál nem forgásszimmetrikus.



összege állandó. Ezt a szimuláció programozása során paraméterként kezeljük (E -vel jelöljük, ami a dimenziótlan összenergia), így vizsgálható például az is, hogy különböző energiák esetén miként változik a mozgás jellege (ezt egy későbbi pontban részletesen bemutatjuk).

Most pedig nézzük meg, hogyan mutatható be a kaotikus mozgás három fő jellemzője (szabálytalanság, előrejelezhetetlenség, fraktálszerkezet a fázistérben) ezen az egyszerű példán.

A kaotikus mozgás első jellemzője: szabálytalan mozgás

A golyó mozgásegyenleteit az $\dot{x} = u$ és $\dot{y} = v$ jelölések bevezetésével könnyen átalakíthatjuk úgy, hogy négy nemlineáris, elsőrendű differenciálegyenletet kapjunk. A korábban említett matematikai definíció szerint így azt várjuk, hogy a kaotikus mozgás megjelenik a rendszerben.

Vizsgáljuk a mozgás pályáját különböző kezdőfeltételekből kiindulva! Ha azt akarjuk, hogy az E összenergia a különböző kezdőfeltételek esetén ugyanaz legyen, indíthatjuk a golyót úgy, hogy mindig egy adott magasságból, de különböző helyekről engedjük el nulla kezdősebességgel. A $V(x, y) = E$ egyenlet határozza meg az edény alakját az E -nek megfelelő magasságban. Egy másik módszer az E összenergia állandó értéken tartására különböző kezdőfeltételek esetén az, hogy tetszőleges pontból indítjuk a golyót úgy, hogy az y irányú sebessége nulla, azaz $v_0 = 0$, az x irányú u_0 kezdősebességet viszont a program segítségével számoltatjuk ki úgy, hogy az összenergia mindig az adott E érték maradjon. Ilyenkor tehát a dimenziótlan energia képletéből kiindulva:

$$E = \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} u^2 + V,$$

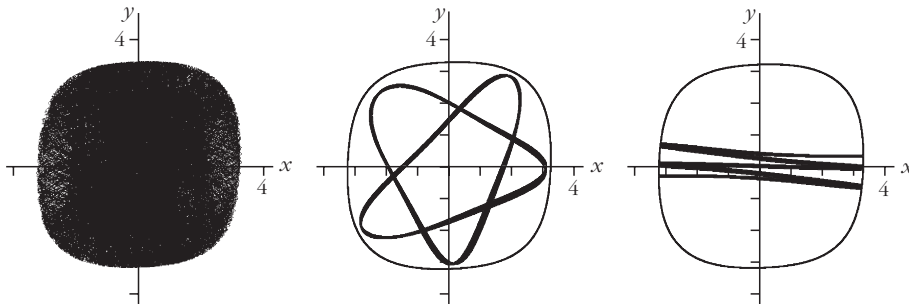
az x irányú sebességre azt kapjuk, hogy:

$$u_0 = \sqrt{2E - v_0^2 - 2V(x_0, y_0)}.$$

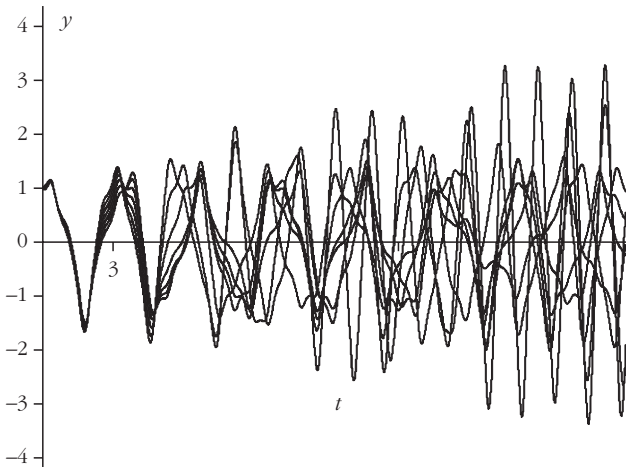
Ha a programba ezt a kifejezést írjuk be u_0 értékére, elérhetjük, hogy az összenergia tetszőleges kezdőfeltétel kiválasztása esetén ugyanaz maradjon.

Ha a golyót tehát különböző kezdőfeltételekkel indítjuk, azt találjuk, hogy – a fenti elvárásnak megfelelően – az esetek döntő többségében annak mozgása kaotikus, a tál minden pontját bejárja úgy, hogy közben a mozgása teljesen szabálytalan.

Akadnak azonban olyan jól megválasztott kezdőfeltételek is, amelyekből indulva a mozgás kvázi-periodikus lesz. Ez azt jelenti, hogy a mozgás közel önmagába visszatérő periodikus mozgás. Mivel a visszatérés nem tökéletes, a pályák nem vékony vonalként, hanem fekete „sávokként” jelennek meg. Az ilyen mozgásokat szabályosoknak tekintjük. A 3. ábrán láthatjuk a mozgást az x - y síkon egy kaotikus, valamint két kvázi-periodikus esetben.



3. ábra. Bonyolult tálban mozgó golyó mozgása az x - y síkban. Mindhárom esetben $E = 60$ és $v_0 = 0$, a további kezdőfeltételek pedig a három különböző esetben: a) $x_0 = -1, y_0 = 1,3$; b) $x_0 = -2,1, y_0 = -2,3$; c) $x_0 = -2,4, y_0 = -0,3$. Az a) eset kaotikus, a golyó bejárja az egész tálát, a fekete tartomány – a golyó mozgásának nyoma – így a tál pereméig terjed az adott összenergia esetén. A b), c) eset kvázi-periodikus, a tál peremét az összehasonlíthatóság kedvéért jelöltük.

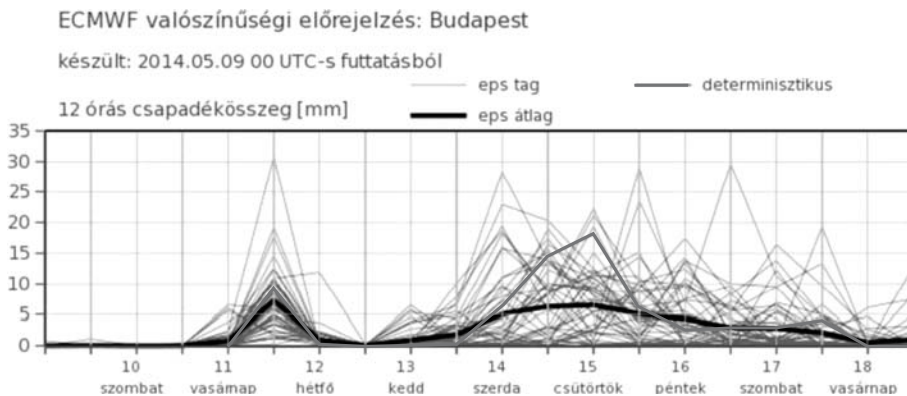


4. ábra. Bonyolult tálban, kaotikusan mozgó golyó fáklyadiagramja. A paraméter: $E = 60$, a kezdőfeltételek: $x_0 = 0, y_0 \in \{0,97; 0,98; 0,99; 1; 1,01; 1,02; 1,03\}, v_0 = 0$.

A kaotikus mozgás második jellemzője: előrejelezhetetlenség

A kaotikus mozgás egy másik fontos tulajdonsága, hogy a kezdőfeltételekre nagyon érzékeny. Ennek következménye az a – középiskolai diákoknak meglepő – tény, hogy két, egymáshoz nagyon közel indított golyó pályája gyorsan szétválik, azaz kis kezdeti eltérés nagyon nagy későbbi különbséghez vezet. Ez azt is jelen-

5. ábra. Az Országos Meteorológiai Szolgálat honlapján található, a 12 órás csapadékösszegre vonatkozó valószínűségi előrejelzés 2014. május 9-én [5]. A grafikonok itt másfél napig futnak együtt, az előrejelzési idő körülbelül 1,5 nap.



ti, hogy a golyó mozgása hosszú távon előrejelezhetetlen, leírása csak valószínűségi fogalmakkal lehetséges.

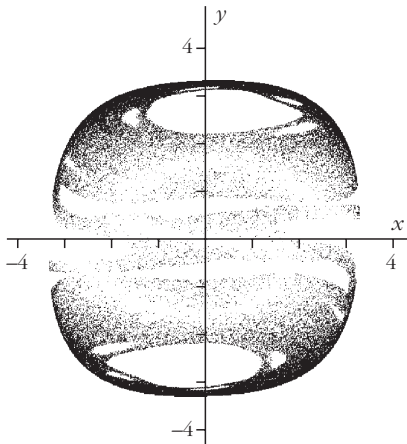
Mindez persze azért olyan meglepő a középiskolában, mert ott gyakorlatilag csak olyan mozgásokat tárgyalunk, amelyek túl egyszerűek ahhoz, hogy kaotikussá váljanak. Azaz csak a „kivételt” tanítjuk, a bonyolultabb fizikai rendszerekre jellemző általános mozgásformát nem. Pedig az egyszerű kaotikus rendszerek

vizsgálatával könnyedén rámutathatnánk arra, hogy a valószínűségi leírás nem csak a kvantummechanika jellemzője (ott persze más okból), hanem a mindenki által jóval egyszerűbbnek vélt mechanika sajátja is.

A kezdőfeltételekre való érzékenységet legjobban az úgynevezett fáklyadiagramon szemléltethetjük. Ezen különböző, de egymáshoz nagyon közeli kezdőfeltételekből indított mozgások valamilyen jellemzőjét (például a helykoordináta egyik komponensét) ábrázoljuk az idő függvényében. A tipikus fáklyadiagram valóban a fáklya alakjára emlékeztet: egy bizonyos ideig a különböző mozgások együtt haladnak, később azonban drasztikusan szétválnak, és egy idő után jól látszik, hogy teljesen lehetetlen előrejelezni a golyó mozgását.

A mozgás y - t grafikonját 7 különböző, de egymáshoz nagyon közel eső kezdőfeltétellel indítva ábrázoltuk (4. ábra). Látszik, hogy $t = 2$ időpontig a grafikonok együtt mozognak, utána viszont szétválnak. A mozgás tehát csak körülbelül 2 időegységig jelezhető előre. Ennél hosszabb időkre az adható meg, hogy milyen valószínűséggel kerül a mozgó test egy adott állapot környezetébe. Mivel a bonyolult tálban mozgó golyó konzervatív rendszer, ezért y értéke csak az E paraméter által meghatározott értékeken belül mozoghat, így a fáklya nem nyílik teljesen szét (az edény y irányú mérete az $E = 60$ magasságban körülbelül 3,26 egység, 1. ábra).

A diákok számára érdekes lehet, hogy a meteorológiai előrejelzésben is teljesen hasonló fáklyadiagramokat használnak: az adott időpontban mért légköri adatokból, valamint több, nagyon közeli adatból kiindulva párhuzamosan több szimulációt futtatnak egyszerre, és vizsgálják, hogy a különböző adatokból indult előrejelzések meddig maradnak nagyjából együtt. Az Országos Meteorológiai Szolgálat honlapján is található ilyen valószínűségi fáklyadiagramok; az 5. ábra szemléltetésképpen mutatja a 2014. május 9-én készült előrejelzés egy grafikonját.



6. ábra. A golyó kaotikus mozgásának Poincaré-metszete az x - y síkon ($v = 0$, valamint $E = 60$). A kaotikusság ebben az ábrázolásban onnét látszik, hogy a pontok beszórnak egy kiterjedt tartományt, összhangban az előrejelezhetetlenséggel. Kezdőfeltétel: $x_0 = 0$, $y_0 = -1$, $v_0 = 0$. (Az a tény, hogy ez jelentősen eltér a 3. és a 4. ábrák kezdőfeltételeitől, mutatja, hogy a rendszerben nagyon könnyű kaotikus mozgást találni.)

A kaotikus mozgás harmadik jellemzője: fraktálszerkezet a fázistérben

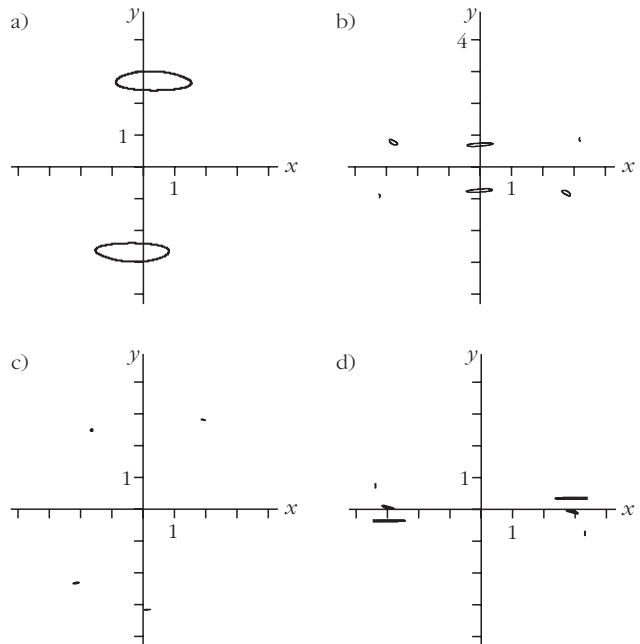
Mindeddig arról volt szó, hogy a kaotikus mozgás szabálytalan, előrejelezhetetlen, így gyakorlatilag derült égből villámcsapásként ér minket a harmadik tulajdonság: a rendezettség.

Ehhez persze megfelelő módon kell vizsgálnunk a mozgást. A módszer lényege, hogy például a bonyolult tálban mozgó golyó esetében az x - y síkot nézve csak bizonyos pillanatokban ábrázoljuk a golyó helyét. Ez az úgynevezett Poincaré-leképezés.

Azt, hogy milyen pillanatokban ábrázoljuk a golyó pozícióját, többféleképpen is megválaszthatjuk, azonban talán a legegyszerűbb eset az, amikor a $v = 0$ feltételt választjuk. Ez azt jelenti, hogy azokban a pillanatokban „fényképezzük le” a golyó helyzetét, amikor az y irányú sebessége éppen 0 lesz, és balról jobbra halad az x irányban.

A programban beállítjuk, hogy a mozgás Poincaré-leképezését szeretnénk ábrázolni az imént említett feltétellel. (Ennek részletes leírását lásd a letölthető oktatói segédanyagban [1].) Ezek után, ha egy véletlenszerűen választott kezdőfeltétellel elindítjuk a mozgást, rendszerint a kaotikus eset Poincaré-metszetét kapjuk, ami a 6. ábrán látható módon néz ki.

A grafikont nézve mindjárt szembetűnik, hogy a pontokkal beszórt kaotikus tartományban vannak „lyukak”, azaz fehér foltok. Állítsuk be most úgy a kezdőfeltételeket, hogy a lyukakban lévő mozgásokat vizsgáljuk. A következő, 7. ábra négy olyan, különböző kezdőfeltétellel elindított mozgás Poincaré-metszetét mutatja, amelyek a lyukakba esnek. Ezek az esetek az úgynevezett kvázi-periodikus esetek, amelyekhez hasonlókat már korábban bemutattunk. A 7. ábra c) és d) része a 3. ábra b) és c) részében ábrázolt kvázi-periodikus mozgások Poincaré-metszete. A kvázi-periodikus mozgások képe ebben az ábrázolás-



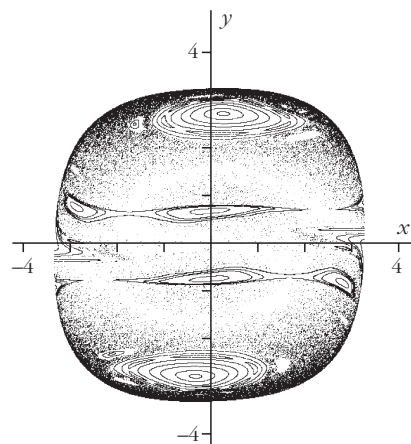
7. ábra. A golyó néhány kvázi-periodikus mozgásának Poincaré-metszete ($v = 0$, valamint $E = 60$) kvázi-periodikus részekkel. Kezdőfeltételek: a) $x_0 = -0,8$, $y_0 = 2,6$ és $v_0 = 0$; b) $x_0 = 2,7$, $y_0 = -0,7$ és $v_0 = 0$; c) $x_0 = -2,1$, $y_0 = -2,3$ és $v_0 = 0$; d) $x_0 = -2,4$, $y_0 = -0,3$ és $v_0 = 0$.

ban tehát zárt görbe, ami arra is utal, hogy az ilyen mozgások pontosan előrejelezhetők, ezért őket egyszerűeknek tekinthetjük.

Ezek után nem marad más hátra, mint a grafikonok egyesítése, azaz a Poincaré-metszetek több, különböző kezdőfeltétellel való megrajzolása, ami kiadja a mozgás teljes Poincaré-térképét (8. ábra).

Ha valami meglepő és izgalmas a káoszban a diákok számára, akkor ez biztosan az. Egy ilyen Poincaré-térkép megrajzolása (a szimuláció beprogramozása után) egyáltalán nem bonyolult, viszont benne rejlik a saját felfedezés élményének lehetősége, a kísérletezés szépsége. Ráadásul ez az, ami segít megértetni a diákokkal, hogy a káosz nem teljes rendezetlenség (véletlenszerűség), hanem szabályos struktúrával rendelkező rendszer.

8. ábra. A golyó mozgásának teljes Poincaré-térképe ($E = 60$). A 6. és 7. ábra görbéit közös koordináta-rendszerben rajzoltuk fel, néhány további kezdőfeltételhez tartozó görbével kiegészítve.

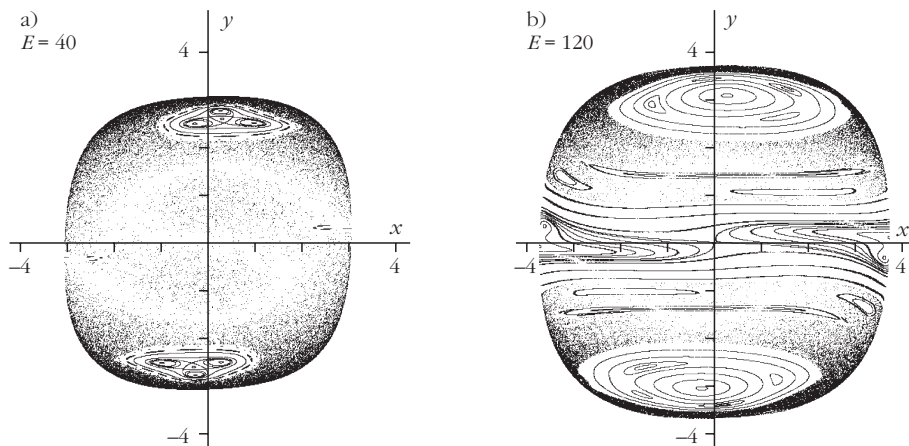


A 8. ábrán látható Poincaré-metszet fraktálszerkezetű. Korábban is olvashattunk a *Fizikai Szemlében* a fraktálokról, így most – a teljesség igénye nélkül – csak annyit jegyzünk meg, hogy az itt látható fraktálszerkezet az úgynevezett kövérfraktál, ami a konzervatív rendszerek sajátossága. Egy hasonlóan kövérfraktál-típusú kaotikus jelenség, a rugalmas inga tárgyalását egy korábbi cikkben olvashatjuk [6].

Érdekes megfigyelni azt is – akár házi feladatként is kiadható a diákoknak –, hogy miként változik a Poincaré-metszet fraktálszerkezete, ha a golyó teljes energiáját, mint paramétert változtatjuk. Ezt mutatja be a 9. ábra. A kaotikus (pontozott) tartomány mindkét esetben nagy kiterjedésű. Ezekon belül a mozgás előrejelezhetetlen, hosszú távon valószínűségi szemléletben értelmezhető. (A zárt görbék előrejelezhető, kvázi-periodikus mozgásokhoz tartoznak.)

Miért érdemes tanítani a káoszt?

Amint azt a most bemutatott példából is látja a tisztelt olvasó, a káosz megértéséhez nem kellenek bonyolult fogalmak, középiskolában (sajnos a szűkös kerettantervi számok miatt inkább csak szakkörön) tanítható.



9. ábra. A 8. ábrához hasonlóan megrajzolt Poincaré-térképek $E = 40$ és $E = 120$ esetekben.

Segít a valószínűségi szemlélet elfogadásában azáltal, hogy megmutathatjuk, ez nem csak a kvantummechanika sajátja. Ráadásul megajándékozza a diákokat a felfedezés örömeivel, és teret ad nekik a kísérletezésre, az önálló munkára, saját eredmények elérésére.

Irodalom

1. <http://fiztan.phd.elte.hu/nyilt/publokt/tjtunde.zip> vagy <http://www.karinthy.hu/home/tjtunde/~>
2. Tél T., Gruiz M.: *Kaotikus Dinamika*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.
3. Gruiz M., Tél T.: A káoszlól, kicsit bővebben. *Fizikai Szemle* 55 (2005) 218–221.
4. Gruiz M., Tél T.: A káosz. *Fizikai Szemle* 55 (2005) 191–193.
5. <http://www.met.hu/idojaras/elorejelzes/valoszinusegi/> – a letöltés időpontja: 2014. május 9.
6. Gruiz M., Radnai Gy., Tél T.: A rugalmas fonálú ingáról – mai szemmel. *Fizikai Szemle* 56 (2006) 337.

XVII. SZILÁRD LEÓ NUKLEÁRIS TANULMÁNYI VERSENY

Beszámoló, III. rész

Sükösd Csaba
BME Nukleáris Technika Tanszék

Számítógépes feladat

A számítógépes feladatban egy idegen, távoli világból érkezett Millikan-kísérlet szimulációjával kellett meghatározni az elemi töltés ottani értékét.

A kiosztott feladatlap szerint: Egy távoli világból érkezett hozzánk a mellékelt kísérlet (1. ábra). A szükséges adatokat a kísérlet leírásában elküldték (nagyon sokban hasonlítanak a földi adatokra).

Az elemi töltés értéke azonban valószínűleg más. Határozzuk meg az ottani elemi töltés értékét a hozzánk eljutott „ottani” Millikan-kísérlet segítségével!

Általános leírás

Millikan kondenzátorlemezek közé porlasztott olajcseppek elektromos töltését mérte meg, és ebből a kísérletből határozta meg az elemi töltést.

1. ábra. A Millikan-kísérlet szimulációjának képernyője.

