

ELEKTROMOSAN FŰTÖTT RIJKE-CSŐ TERMOAKUSZTIKUS MODELLJE

Beke Tamás
SZTE TTIK Fizika Doktori Iskola
Nagyasszonyunk Katolikus Általános Iskola és Gimnázium

A Rijke-cső egy viszonylag egyszerű termoakusztikus eszköz: mindkét végén nyitott cső, amelynek belsejébe egy hőforrást helyeznek el; a hő forrása lehet gázláng vagy elektromos fűtés. Ha a cső függőleges helyzetben van és a hőforrás a cső alsó felében található, akkor a cső erős hangot bocsáthat ki a hőforrás helyzetétől függően. A jelenséget *Petrus Leonardus Rijke* fedezte fel, ezért Rijke hanghatásnak nevezik ezt a termoakusztikus jelenséget, amely során a hő hatására hanghullám alakul ki az eszközben [1].

Korábbi cikkeinkben a gázzal fűtött Rijke-csövek termoakusztikus tulajdonságait, folyamatait mutattuk be [2–5]. A csövek viselkedését a Nagyasszonyunk Katolikus Általános Iskola és Gimnázium gimnazista tanulóival vizsgáltuk projektfeladat keretei között. A gázfűtésű Rijke-csövekkel több mint egy évig végeztünk méréseket, számos összefüggést „felfedeztünk”, de ezek inkább csak kvalitatív jelegű megállapítások voltak. Mérési eredményeink nagyfokú bizonytalanságot mutattak, ezért úgy döntöttünk, hogy építünk egy elektromos árammal fűtött Rijke-csővet, és azzal pontosabb méréseket végzünk. (Az áram teljesítményét könnyebben szabályozhatjuk és egyszerűbb a hőteljesítmény mérése is, mint a gázláng esetén.) Ez volt

projektünk második lépcsőfoka, ami szintén egy évnél hosszabb időt vett igénybe. Ebben a cikkben az elektromosan fűtött Rijke-csővel végzett mérési sorozat jellemzőit mutatjuk be.

A mérési elrendezés

A korábbi mérések alapján megállapítottuk, hogy a cső hangkibocsátását a cső geometriai paraméterein kívül a cső helyzete, a rács helyzete (x_r), rácsra jutó hőteljesítmény (P), a rács abszolút hőmérséklete (T_r), a csövön átáramló légáram intenzitása (m_l), a fűtés időtartama (t_f), és a fűtött rács áteresztőképessége határozza meg. A mérésekhez egy $L = 1200$ mm hosszúságú, alumíniumból készült Rijke-csővet használtunk, amelynek külső átmérője 78 mm, belső átmérője 72 mm. A vízszintes helyzetű, elektromos árammal fűtött Rijke-csővet az *1. ábrán* láthatjuk.

A vízszintes elhelyezkedésű cső esetében egy külön szerkezettel (porszívóval) nekünk kell légáramlást biztosítani a Rijke-csőben. A porszívó által keltett légáram intenzitást szabályozni tudtuk a porszívó teljesítményével, illetve a szívócsőbe helyezett „fojtószelep”



1. ábra. A vízszintes helyzetű, elektromosan fűtött Rijke-cső.

segítségével; így viszonylag tág határok között „szabadon” tudtuk vizsgálni a légáram-intenzitás szerepét a rendszerben. (A mérési elrendezés részletesebb ismertetését egy korábbi cikkben megadtuk, most csak a legfontosabbakat emeljük ki.) A hő forrása egy elektromosan fűtött drótháló volt, amely viszonylag sűrű szövésű, körülbelül 0,45 mm átmérőjű acéldrótokból állt, átteresztőképessége körülbelül 80%-os volt. Mivel a drótháló „szövése” egyenletes volt, ezért feltételeztük, hogy a felületén egyenletesen tudja „leadni” a hőt.

A dróthálót egy hengeres kerámiabetét tartotta a Rijke-cső belsejében a kívánt helyen. A kerámiabetét hossza 65 mm, belső átmérője 51 mm, külső átmérője 71,5 mm volt; így pontosan beleillett az alumínium Rijke-cső belsejébe. A kerámiabetétben hosszirányban 5 mm átmérőjű furatok helyezkedtek el. A furatokat arra használtuk, hogy a bennük elhelyezett csavarokkal rögzítettük a dróthálót a kerámiabetéten azért, hogy meggátoljuk a rács elmozdulását. Erre mindenképpen szükség volt, hiszen a rácsot elektromos szempontból el kellett szigetelni az alumíniumcsőtől. Ezen kívül a kerámiabetét akadályozta a drótháló és a cső fala közötti termikus kölcsönhatás is, ez szintén hasznosnak bizonyult, hiszen a kísérletekben nem a cső felmelegítése volt a célunk, hanem a csőben áramló levegőt szerettük volna a rácsnál „lokálisan” felmelegíteni. A drótháló elektromos fűtéséhez szükséges áramot két 1000 mm hosszúságú és 4,5 mm átmérőjű sárgarézből készült pálcán keresztül vezettük a rácshoz a cső nyitott „alsó” vége felől.

A drótháló elektromos fűtéséhez egy Trakis Hetra 101 SM típusú hegesztő transzformátort használtunk, ennek névleges teljesítménye 4 kW, a maximálisan elérhető áramerősség pedig 100 A. A kísérletek során mértük a rácson keresztül folyó áram erősségét és a rácson eső feszültséget. Valójában a rácson és a két rézpálcán eső feszültséget mértük, de a pálcák ellenállása elhanyagolható a rács elektromos ellenállásához képest, ezért első közelítésben úgy vettük, hogy a pálcákon nem esik feszültség. (A pontosabb számításoknál ezt is figyelembe vettük.)

A vízszintes helyzetű Rijke-csőben a levegő áramoltatására egy ETA 3404 típusú ipari porszívót használtunk, amelynek a legnagyobb szívási teljesítménye $0,0026 \text{ m}^3/\text{s}$ (azaz kb. 3 g/s) volt normál körü-

mények esetén. A szívócső nem közvetlenül kapcsolódott a Rijke-cső „felső” végéhez. Az alumíniumcső vége egy $450 \times 450 \times 500 \text{ mm}$ élhosszúságú, vastag falú kartondobozba nyílt. A doboz ezzel szemközi oldalában is volt egy kisebb átmérőjű nyílás, ide csatlakozott a szívócső. (A csatlakozási pontokat ragasztóval tömítettük.) A kartondobozra két okból volt szükség: egyfelől a dobozba tettük a mikrofont, így csökkentettük a külső környezet zajhatását; másfelől a kartondoboz csillapító kamraként funkcionált, ezzel elértük, hogy a porszívó légáramlást tudott kelteni a Rijke-csőben, viszont Rijke-cső és a porszívó cső termoakusztikai szempontból jó közelítéssel függetlennek tekinthető.

A rács és a cső különböző pontjai hőmérsékletének mérésére IR-380 és IR-1000L típusú infravörös hőmérőket alkalmaztunk. A kísérletek során megállapítottuk, hogy a hálóra jutó elektromos fűtőtelsítményt csak lassan szabad növelni; ezért magát a mérést mindig megelőzte egy „felfűtési procedúra”. Ez a „bemelegítési” folyamat a kísérletek során általában 1–5 percig tartott. A termoakusztikus rendszerünk stabilitását meghatározó 3 „fő” paraméter: a rács helyzete (x_r), a csővön átáramló légáram intenzitása (m_i), és a rácsra jutó hőteljesítmény (P). Ezeket a jellemzőket viszonylag pontosan tudtuk mérni, illetve ki tudtuk számítani. A fő célunk tehát annak meghatározása, hogy ez a három paraméter a stabilitás-instabilitás szempontjából hogyan befolyásolja rendszerünk termoakusztikai állapotát.

A mérés menete

A mérések menete hasonló volt a gázlánggal fűtött vízszintes helyzetű Rijke-csővel végzett kísérleteinkhez. Az első lépés a rács pozíciójának beállítása a vízszintes csőben. Négy olyan rácspozíciót jelöltünk ki, ahol alaposabb vizsgálatokat végeztünk: ezek rendre az $x_r = L/8$, $x_r = L/4$, $x_r = 3L/8$ és az $x_r = 5L/8$ rácshelyek voltak.

Minden rácspozíció esetén nullától a maximális értékig változtattuk a csőbeli légáram intenzitását. A rácspozíció és a légáram-intenzitás rögzítése után következett az elektromos fűtőtelsítmény beállítása. Röviden tehát azt mondhatjuk, hogy a fenti paraméter-hármasok függvényében vizsgáltuk, hogy rendszerünk stabil vagy instabil állapotban van-e. Mindeközben persze figyeltük a rács hőmérsékletét, és ha megszólalt a hang, akkor mértük a hang intenzitását is.

A Rijke-cső egyszerűsített modellje

Első lépésként kidolgoztunk egy viszonylag egyszerű matematikai modellt, amely a Rijke-csőben zajló folyamatokat jellemzi; modellünk megalkotásakor felhasználunk Matveev eredményeit [6]. A modellben az alábbi egyszerűsítésekkel élünk [6] alapján:

- A csőben áramló levegő intenzitását állandó értékűnek tekintjük. A csőben a légáramot egydimenziósnak vesszük, csak lamináris áramlással számolunk.

- A csőben a rácsnál van egy hőmérsékletugrás, a cső hőmérsékletét egyébként állandó értékűnek tekintjük.

- A rács által kisugárzott hővel nem számolunk és a cső által a rácstól elvezetett hőt is elhanyagoljuk, azaz csak a rács és a környező levegő közötti hőkonvekciót vesszük figyelembe.

- Feltételezzük, hogy a csőben csak lineáris folyamatok zajlanak.

- A csőben lévő levegő szinuszos rezgéseket végez, az ettől való eltérések kicsik, ezért azokat elhanyagoljuk.

- A gravitáció hatásával nem számolunk.

- A csőben áramló levegő (átlagos) sebessége kicsi a hangsebességhez képest. (Kicsi a rendszerünk jellemző Mach-szám.)

- A csillapító kamra hatását elhanyagoljuk.

A rendszer gerjesztéséhez szükséges kritikus teljesítmény (P_{kr}) az a minimális teljesítmény, amit ha túllépünk, akkor az adott körülmények között már gerjeszthető a termoakusztikus rendszer; a kritikus teljesítmény esetén a rendszerbe bevitt energia éppen egyensúlyban van a veszteségek miatt kiáramló energiával. *Culick* szerint a termoakusztikai rendszer Gálerkin-féle (akusztikus) állapotai jó közelítéssel függetlenek tekinthetők, azaz a köztük lévő csatolás elhanyagolható, ezért az akusztikus módokat külön-külön vizsgálhatjuk [7, 8]. A korábbi cikkben bemutatott módon megkaptuk az egyszerűsített modellben az n -ik módhoz tartozó kritikus teljesítményt [6] felhasználásával. Megállapítottuk, hogy egyszerűsített modellünk általában jóval kisebb kritikus teljesítményt ad meg, mint amit a mérések során tapasztaltunk. Az eltérés akár 30–100% is lehet a közepes légáram-intenzitás tartományban, magasabb légáram-intenzitások esetében a hiba 100–150%-os.

Ilyen nagy hiba a gyakorlati technikai alkalmazások esetén nem engedhető meg. A hiba forrása az lehet, hogy az egyszerűsített modellben nem volt elég alapos a hőátadás vizsgálata, például nem számoltunk a hőszugárzás hatásával. A mérések során nemlineáris jelenségeket is megfigyeltünk (pl. hiszterézis, vagy örvények keletkezése), ezekre értelemeszerűen nem ad magyarázatot egyszerű modellünk. Ezért kidolgoztunk egy újabb modellt, amiben már figyelembe vesszük a rendszerben fellépő egyéb energiaáramlásokat is. A pontosság javítása érdekében a korábbi feltételezéseinket a következőképpen módosítottuk: a hőtranszfer folyamán meghatározzuk a rácstól az áramló levegőbe jutó hőteljesítményt, a csőfalba jutó hőteljesítményt és a környezetbe jutó hőteljesítményt, az áramvezető pálcá által leadott hőteljesítményt, illetve figyelembe vesszük, hogy a cső belsejében nem egyenletes a hőmérséklet eloszlása. A rendszerben fellépő zavarok kismértékűnek tekinthetők, ezért az egyszerű modell többi feltételezését továbbra is igaznak fogadhatjuk el.

A hullámegyenlet megadása

A nyomás, a sűrűség, a levegőbeli sebesség és a hőteljesítmény-sűrűség pillanatnyi értékét úgy írhatjuk fel, hogy vesszük az adott mennyiség csőbeli átlagértékét, és ehhez hozzáadunk egy időben és helykoordinátában is fluktuáló komponenst. A termoakusztikus rendszerünket jellemző hullámegyenlet [6] alapján:

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - v_b^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{v_b^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial x} \frac{\partial p'}{\partial x} =$$

$$= (\gamma - 1) \frac{\partial q'}{\partial t} + \rho_0 v_b^2 \frac{\partial \Omega}{\partial t}, \quad (1)$$

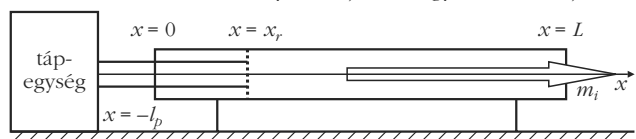
ahol p' a nyomás fluktuációja, v_b a hang sebessége, ρ_0 a sűrűség átlagértéke, γ a gáz fajhőviszonya, Ω' az egységnyi térfogatra vett forrásintenzitás fluktuációja, a q' mennyiség a rendszerbe jutó hőteljesítmény-sűrűség fluktuációja. A rendszer termoakusztikus instabilitásáért felelős tag arányos a hőteljesítmény-sűrűség fluktuációjának idő szerinti deriváltjával. A hullám csillapodását okozza a hővezetés, a viszkozitás az akusztikai határrétegen és a cső végeinél kisugárzott hang; ezek a csillapító tényezők az utolsó tagba vannak belefoglalva, amely arányos az egységnyi térfogati forrásintenzitás fluktuációjának időbeli deriváltjával [6].

A rendszerben fellépő hőátadási folyamatok elemzése

A Rijke-csőben kialakuló instabilitás függ attól, hogy a felhevült rács miként adja át energiáját a környezetének, ezért részletesebben elemezzük a folyamatot. A cső belsejében a gáz áramlása 3 dimenziós folyamat, miközben örvények is keletkezhetnek, mint azt a gázzal fűtött csövekkel végzett kísérletek során láthattuk [4, 5]. A hőátadási folyamat három részre bontható: hőkonvekció, hővezetés és hőszugárzás. Ha a rendszer instabil állapotban van, akkor a csőbeli légáram intenzitása is fluktuál és a hő konvekciójában is fluktuáció mutatkozik. A rendszer precíz 3 dimenziós modellezése nagyon bonyolult lenne; ezért csak arra vállalkoztunk, hogy kifejlesszünk egy olyan egydimenziós modellt, amelyben a hőátadás minden fontos aspektusát figyelembe vesszük és ezáltal az egyszerűsített modellnél pontosabban írhatjuk le termodinamikai rendszerünk viselkedését. A következőkben e modell főbb jellemzőit mutatjuk be, a részletek ismertetése meghaladja a cikk kereteit.

A vízszintes helyzetű, elektromos árammal fűtött Rijke-cső vázlatát a 2. ábrán láthatjuk. Rendszerünk

2. ábra. A vízszintes helyzetű Rijke-cső egyszerű modellje.



modellje egy vízszintes cső, amelybe egy lokálisan kis kiterjedésű, síknak tekintett hőforrást (fűtött rácst) helyezünk az x_r pontba; a csövön keresztül m_i intenzitású levegő áramlik át.

A modell alapjául az energia megmaradásának elve szolgál, amelyre egy kvázi-stacionárius egydimenziós egyenletrendszert fogunk felírni. A hőátadás folyamán a következő komponenseket kell figyelembe vennünk [6] felhasználásával:

Kényszerített konvekció:

- a rács és az áramló levegő között;
- az áramvezető pálcá és az áramló levegő között;
- a cső fala és az áramló levegő között.

Természetes konvekció:

- a cső és a körülötte lévő külső levegő között;
- az áramvezető pálcá csövön kívüli része és a külső levegő között;
- a pálcá csövön belüli része és az áramló levegő között.

Hővezetés:

- a cső falában;
- az áramvezető pálcában.

Hősugárzás:

- a rács és az áramló levegő, illetve a cső fala között;
- az áramvezető pálcá csövön kívüli része és a környezet, illetve az áramvezető pálcá csövön belüli része és az áramló levegő és a cső fala között;
- a cső és a környezete között.

A következő egyenletekben T az adott csőkeresztmetszetenél az átlagos hőmérsékletet jelenti. Az alsó indexek közül r a rácst, l a csőben áramló levegőt, c a csövet, p az áramvezető pálcát, k pedig a csövet körülfogó környezetet jelöli. A felső indexek közül $kkon$ a kényszerített konvekciót, $tkon$ a természetes konvekciót, bv a hővezetést, bs a hősugárzást jelöli.

Az energiamegmaradás törvényének értelmében a rácstra jutó elektromos hőteljesítmény (P_r) egyensúlyi állapotban egyenlő a rácst elhagyó teljesítménnyel. A rácstról hő távozik a rajta keresztül áramló levegőbe kényszerített konvekcióval (\dot{Q}_{rl}^{kkon}), az áramvezető pálcá is elvezet valamennyi hőt a rácstól (\dot{Q}_{rp}^{bv}), és a rács hősugárzással is lead energiát a környezetének (\dot{Q}_r^{bs}). A Rijke-cső fala és a rács közötti hővezetést elhanyagolhatjuk, mert a rács és a csőfal közötti kerámiatubus majdnem teljesen megakadályozza a hővezetést. A rács esetén a teljesítményekkel kifejezve felírhatjuk az energiamegmaradás elvét:

$$P_r = \dot{Q}_{rl}^{kkon} + \dot{Q}_{rp}^{bv} + \dot{Q}_r^{bs}. \quad (2)$$

A hővezetés általános egydimenziós (x irányú) alap-egyenlete [9]:

$$\lambda \frac{d^2 T}{dx^2} \Delta x = \frac{1}{S} \dot{Q}^{bv}, \quad (3)$$

ahol λ a hővezetési tényező, S a hővezetésben résztvevő felület, Δx az x irányú „lépésköz” (távolság), \dot{Q}^{bv} a hővezetési teljesítmény (hőáram). A cső falában a hővezetési hőáram nagysága egyenlő a cső

belsejében áramló levegőbe kényszerített konvekciós hőáram, a környező levegőbe történő természetes konvekciós hőáram és a cső hősugárzási hőárama összegével:

$$\lambda_c S_c \frac{d^2 T}{dx^2} \Delta x_c = \dot{Q}_{cl}^{kkon} + \dot{Q}_{ck}^{tkon} + \dot{Q}_{cl}^{bs} + \dot{Q}_{ck}^{bs}, \quad (4)$$

ahol S_c a csőfal keresztmetszete, λ_c a cső anyagának hővezetési tényezője (alumínium esetén $\lambda_c = 221$ W/mK).

A rácstra két áramvezető pálcá segítségével jut az elektromos energia. Mivel a két pálcá szimmetrikusan helyezkedik el, ezért a hőtranszport kiszámításánál elegendő az egyiket vizsgálni, a másikkra is hasonló kifejezés érvényes. A pálcára is felírhatjuk az energiamegmaradást kifejező egyenletet a teljesítmények segítségével:

$$\lambda_p S_p \frac{d^2 T}{dx^2} \Delta x_p = \dot{Q}_{pl}^{kon} + \dot{Q}_{pk}^{tkon} + \dot{Q}_p^{bs} - P_p, \quad (5)$$

ahol λ_p jelenti az áramvezető pálcá anyagának hővezetési tényezőjét (sárgaréz esetén $\lambda_p = 117$ W/mK), S_p a pálcá keresztmetszete, P_p pedig az egyik áramvezető pálcára jutó elektromos hőteljesítmény. (Itt már figyelembe vettük, hogy magának az áramvezető pálcának is van ohmos ellenállása. Az egyszerűség kedvéért feltételezhetjük, hogy az elektromos ellenállás miatti hőteljesítmény egyenletesen oszlik el az egész áramvezető pálcán.) A pálcá által hősugárzás formájában kisugárzott energia két tagból áll, egyfelől a pálcá csövön kívüli része a környezetbe, másfelől a pálcá csövön belüli része főként az áramló levegőbe, illetve a Rijke-cső falába sugároz ki hőt.

A Rijke-csőben áramló levegő által konvekcióval szállított hőáram egyenlő a pálcá, a cső fala és a rács közötti kényszerített konvekciós hőárammal. Az energiamegmaradás elvének kifejezése [6] felhasználásával:

$$m_i c_p \frac{dT_l}{dx} \Delta x_l = \dot{Q}_{cl}^{kkon} + \dot{Q}_{pl}^{kon} + \dot{Q}_{rl}^{kkon} \delta(x - x_r), \quad (6)$$

ahol m_i a légáram intenzitása, c_p a levegő izobár fajhője ($T = 300$ K hőmérsékleten $c_p = 1004$ J/kgK). A δ függvényvel való szorzás jelentése, hogy a rács a levegőnek lokálisan „szinte egy pontban” (a rácspozícióban) adja át a hőt.

A csőben áramló levegőben a hővezetés elhanyagolható a hőkonvekcióhoz képest. Feltételezhetjük, hogy ha elég hosszú ideig várunk és kialakul az egyensúlyi állapot, akkor a cső végeinek hőmérséklete állandó, és sem a cső bal végén ($x = 0$), sem a cső jobb végén ($x = L$) sincs már hőátadás. Az egyszerűség kedvéért feltételezhetjük, hogy a csőbe beáramló levegő hőmérséklete közelítőleg megegyezik a csövet körülvevő levegő (környezet) hőmérsékletével.

A cső belsejében a hőmérséklet a rács közelében jóval magasabb, mint a cső többi helyén. A cső na-

gyobbik része viszonylag alacsony hőmérsékletű a rácshoz képest. A cső falában a hővezetés miatt változik a hőmérséklet, de ezt most egy kis időre elhanyagoljuk. A „fekete test” (black body) sugárzás útján kibocsátott hőteljesítménye a Stefan–Boltzmann-törvényből számítható ki:

$$\dot{Q}^{bs} = S \sigma T^4, \quad (7)$$

ahol σ a Stefan–Boltzmann-állandó ($\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$). A „szürke test” sugárzás útján kibocsátott hőteljesítménye a „fekete test” hőteljesítményének ϵ -szorososa:

$$\dot{Q}^{bs} = \epsilon S \sigma T^4, \quad (8)$$

ahol ϵ az emissziós együtthatót jelenti. A rács esetén meg kell különböztetnünk a rács középső részét, ahol a levegő „szabadon” áramolhat rajta keresztül, illetve a drótháló szélső peremgyűrűjét, ahol a levegő áramlása akadályba ütközik, hiszen a rács itt van a kerámiatubushoz rögzítve. Mivel a rács nem fedi le a cső teljes belső keresztmetszetét, ezért az effektív hőteljesítmény kiszámításához azt feltételeztük, hogy a rács középső „szabad” felülete (S'_r) az áramló levegőbe sugározza ki az energiáját, a rács külső pereme pedig a csőfalba sugározza ki a hőt. A rácstartó kerámiatubus szerepét az egyszerűség kedvéért elhanyagoltuk. A rács által kisugárzott teljesítmény:

$$\dot{Q}_r^{bs} = \epsilon_r \sigma \left[S'_r (T_r^4 - T_l^4) + (S_r - S'_r) (T_r^4 - T_c^4) \right], \quad (9)$$

ahol ϵ_r a rács emissziós együtthatója ($\epsilon_r = 0,85$). A cső fala által a környezetbe kisugárzott hőteljesítményt a következő kifejezéssel becsülhetjük [6]:

$$\dot{Q}_c^{bs} = \epsilon_c S'_c \sigma (T_c^4 - T_k^4), \quad (10)$$

ahol ϵ_c a cső anyagának emissziós együtthatója ($\epsilon_c = 0,89$), S'_c a cső felülete.

Az áramvezető pálcá hősugárzási teljesítményének kiszámításához a következő modellt használtuk: a pálcá l_p hosszúságú része „lóg ki” a Rijke-csőből, a pálcá teljes hossza L_p . Az egyszerűség kedvéért úgy vettük, hogy a pálcá bal szélének hőmérséklete megegyezik a környezet hőmérsékletével (T_k), a pálcá jobb vége viszont a rácshoz csatlakozik, ezért a hőmérséklet itt a rács hőmérséklete (T_r). Azt feltételeztük, hogy a pálcá bal szélétől a jobb széléig haladva a hőmérséklet egyenletesen növekszik. Ennek alapján a pálcá hősugárzási teljesítményét két részre bonthatjuk: egyfelől a Rijke-csővön kívüli pálcaszakasz a környező levegőbe sugároz ki energiát, másrésztől a csővön belüli pálcaszakasz a csőben áramló levegőbe és azon keresztül a csőfalba sugároz ki energiát. Az egyszerűség kedvéért a csőfal hőmérsékletét (T_c) állandónak tekintettük, ez a T_c érték a csőfal átlaghőmérsékletét jelenti; és úgy vettük, hogy a pálcá csőben lévő része körül az áramló levegő átlaghőmérsékletének (T_l) és a csőfal átlaghőmérsékletének átlaga a

hőmérséklet. Ezek alapján kiszámítottuk a pálcá által kisugárzott \dot{Q}_p^{bs} hőteljesítményt:

$$\epsilon_p \sigma \pi D_p \left[\left(T_r^4 + T_k^4 + T_r^3 T_k + T_r T_k^3 + T_r^2 T_k^2 \right) \frac{L_p}{5} + \left(\frac{T_c + T_l}{2} \right)^4 (L_p - L_p) - T_k^4 L_p \right], \quad (11)$$

ahol ϵ_p a pálcá emissziós együtthatója ($\epsilon_p = 0,86$), D_p az áramvezető pálcá átmérője. Mivel két szimmetrikus elhelyezésű áramvezető pálcá van, ezért a teljes sugárzási teljesítményük ennek a duplája.

A számítási modell

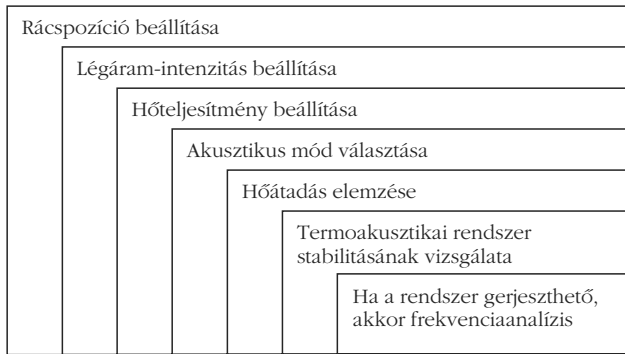
Az előbbieken meghatároztuk a hőátadás különböző komponensei közötti kapcsolatokat. A kezdő- és peremfeltételek alkalmazásával az egyenleteket numerikusan megoldva megkapjuk az áramló levegő, a csőfal és az áramvezető pálcák hőmérsékletét a rács helyzetének függvényében. A cső hossza (L) mentén N darab kis Δx tartományra bontjuk a rendszerünket. Az áramlási hőmérséklet térbeli deriváltját az x_i koordinátájú pontban úgy közelíthetjük:

$$\frac{dT(x_i)}{dx} \approx \frac{T(x_i) - T(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{T(x_i) - t(x_{i-1})}{\Delta x}, \quad (12)$$

ahol $T(x_i)$ jelenti az x_i koordinátájú pont abszolút hőmérsékletét, és $\Delta x = x_i - x_{i-1} = L/N$, mert végig egyenletes felosztást használunk. A rendszer pontjai hőmérsékletének másodrendű deriváltjait a másodrendű differenciálokból kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T(x_i)}{dx^2} &\approx \frac{\frac{T(x_{i-1}) - T(x_i)}{\Delta x} - \frac{T(x_i) - T(x_{i-1})}{\Delta x}}{\Delta x} = \\ &= \frac{T(x_{i-1}) + T(x_{i-1}) - 2 T(x_i)}{(\Delta x)^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

A hőtranszfert leíró egyenletek jobb oldala nem mindig lineáris, mivel a sugárzástól és a hőátadási koefficiens-től is függ, ami viszont függ a hőmérséklettől [6]. A hőmérsékleteket tartalmazó egyenletrendszerek megoldásához iteratív eljárást használhatunk. Minden egyes lépés során a helyi jellemzők határozzák meg a helyi hőmérsékletet. Abból indulunk ki, hogy az adott x_i koordinátájú pontban megadjuk a hőmérséklet kezdőértékét (ez általában szobahőmérsékletet jelent). Ezután a ráccsal közölt hő hatására az egyenletekben szereplő hőmérsékletek kicsit növekedni kezdenek. Az előbbi hőmérsékletekkel megadott egyenletrendszert megoldhatjuk valamilyen hagyományos módszerrel, amiből újabb hőmérsékleteket kapunk, majd újra megoldjuk az egyenletrendszert. Ezt az eljárást addig ismétljük, amíg a hőmérséklet-függvény már nem változik to-



3. ábra. A rendszer stabilitásának ellenőrzése.

vább, tehát addig, amíg az eredmény nem konvergál egy adott értékhez; azaz minden i -re ($0 \leq i \leq N$) létezik egy olyan j' pozitív egész szám, amelyre igaz, hogy minden tőle nagyobb pozitív egész j szám esetén (azaz $j > j'$):

$$\left| T(x_i)^{(j)} - T(x_i)^{(j')} \right| \leq \epsilon^*, \quad (14)$$

ahol a $T(x_i)^{(j)}$ azt jelöli, hogy az x_i koordinátájú pontban a j -ik iterációs lépésben mekkora a hőmérséklet, ϵ^* pedig tetszőlegesen kicsi pozitív szám, amelynek értékét mi határozhatjuk meg. Minél kisebb ϵ^* , annál pontosabban kapjuk meg a hőmérsékletet az adott koordinátájú pontban. Ha a (14) egyenlőség teljesül, akkor a $T(x_i)^{(j')}$ hőmérsékletet tekintjük az x_i koordinátájú pont „egyensúlyi” hőmérsékletének.

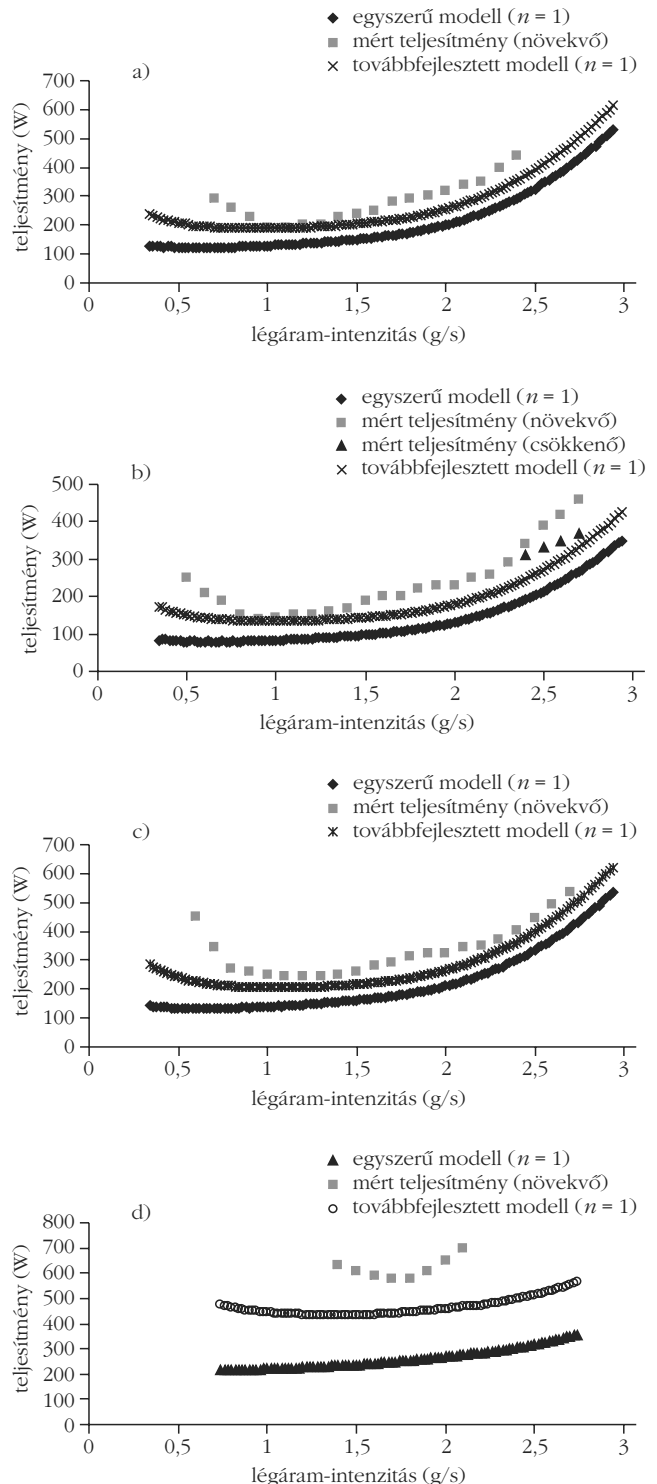
Az iteratív módszer alkalmazásának vannak korlátai. Ha a rács hőmérséklete túlzottan magas, ami akkor fordulhat elő, ha nagy a rácsot fűtő hőteljesítmény, miközben kicsi a rácson átáramló levegő intenzitása, akkor az iterációs módszer nem konvergál egy adott megoldáshoz, mivel a rendszer „nagyon nemlineáris” viselkedésű. (A sugárzással kibocsátott energia a hőmérséklet negyedik hatványával arányos.)

A rendszer stabilitásának ellenőrzése

A rendszer stabil állapotát a hullámegyenletről kapjuk meg az egyes akusztikus módok stabilitásán keresztül. Ha minden akusztikus mód stabil, akkor maga a termodinamikai rendszerünk is stabil, de ha akár egyetlen mód is instabil, akkor rendszerünk is instabil állapotban van [6]. Az instabilitás szempontjából elég csak az alacsony módokat ellenőrizni, mert a magasabb módok esetén a csillapítás a frekvenciával gyorsan nő. Elsőként kiválasztjuk a bennünket érdeklő rácspozíciót, majd a légáram-intenzitást. Ezután meghatározzuk azt a kritikus hőteljesítményt, ami már elegendő ahhoz, hogy rendszerünk instabil állapotba kerüljön. Ez úgy történik, hogy a leírtaknak megfelelően iteratív eljárással meghatározzuk a cső belsejében a hőmérséklet térbeli eloszlását és a rácstről a rajta átáramló levegőbe konvekcióval átadott hőteljesítményt, illetve a hősugárzás és a hővezetés hatását is figyelembe vesszük. Rendszerünk stabilitását a legalacsonyabb módtól kezdve teszteljük, ha

találunk instabil módot, akkor rendszerünk maga is instabil, ellenben ha minden vizsgált mód stabil, akkor az adott paraméterek (x_r , m_p , P) mellett maga a termodinamikai rendszer is stabil állapotban van. Ha a rendszer stabilnak mutatkozott, akkor nagyobb fűtőteljesítménnyel folytatjuk annak tesztelését. Ha az adott hőteljesítmény esetén rendszerünk instabil,

4. ábra. Az egyszerű és a továbbfejlesztett modell alapján számított kritikus teljesítmények összehasonlítása a kísérleti adatokkal a) $x_r = L/8$; b) $x_r = L/4$; c) $x_r = 3L/8$; d) $x_r = 5L/8$.



akkor csökkentjük a hőteljesítményt és megvizsgáljuk, hogy vajon kisebb teljesítmény esetén stabil állapotba kerül-e rendszerünk. Így megkapjuk, hogy mi az a legkisebb teljesítmény, ahol a rendszer instabil állapotba kerül, illetve mi az a legnagyobb teljesítmény, ahol a rendszer még stabil állapotban van. Ezután a légáram-intenzitást megváltoztatjuk és előlről kezdjük az egész tesztelési eljárást, majd a rácspozíciót is változtatjuk és így ismétljük meg az eljárást; a végén megkapjuk a rendszer stabil és instabil állapotait elválasztó határgörbét.

Az algoritmus implementálása C++ nyelven történt. A stabilitási határértékek kiszámítására szolgáló algoritmus vázlata a 3. ábrán látható. Ha termoakusztikus rendszerünk a modell alapján gerjeszthetőnek mutatkozik, akkor a pontosabb számítások érdekében még frekvenciaanalízist is végzünk. Ennek a leírására egy későbbi cikkben szeretnénk visszatérni.

A stabilitási határértékeket 4 különböző rácspozíció esetén teszteltük az eljárás segítségével. A numerikus eredményeket összehasonlítottuk a kísérleti eredményekkel és az egyszerűsített modell értékeivel is (4. ábra).

Megállapíthatjuk, hogy a továbbfejlesztett modellekből elméletileg kapott adatok jóval pontosabbak. Az egyszerű modellünk alapján számolt stabilitásigörbe-értékek gyakran csak feleakkorák voltak, mint a kísérletileg kapott görbe értékei. A továbbfejlesztett modell alapján sokkal jobb egyezést kaptunk; közepes hőteljesítmény és légáram-intenzitás mellett a kísérletekből kapott és a modell alapján számított görbe között jóval kisebbek az eltérések, mint az egyszerű modell esetén, ezért ez a továbbfejlesztett modell inkább alkalmas a valós fizikai rendszer leírására. Túlzottan magas, illetve túlzottan alacsony hőteljesítmény és légáram-intenzitás esetén mindkét modell torzít, hiszen itt már olyan fizikai effektusok is felléphetnek (pl. örvényképződés), amellyel egyik modellben sem számoltunk.

Összegzés

Ebben a cikkben egy továbbfejlesztett termoakusztikus modellt mutattunk be, amely alkalmas arra, hogy segítségével a Rijke-csőben lezajló folyamatok esetén a stabilitást az instabilitástól elválasztó határgörbét pontosabban meghatározzuk. A modell alapján kiszámított stabilitási görbéket a kísérletekből kapott stabilitási görbékkel összehasonlítva azt mondhatjuk, hogy a rendszer paramétereinek középső tartományában a modell elfogadható pontossággal írja le a valós termoakusztikus rendszert a stabilitás szempontjából; alacsony és magas légáram-intenzitások és hőteljesítmények esetén viszont a modellünk már kevésbé pontos.

Köszönetnyilvánítás

Az írás a Szegedi Tudományegyetem Természettudományi és Informatikai Karán Fizika PhD-program (A közép- és a felsőfokú fizika oktatásának fejlesztésére irányuló kutatások) keretében készült. Külön köszönetem szeretném kifejezni témavezetőnek, Papp Katalinnak, aki hasznos információkkal és adatokkal segítette a cikk megírásában.

Irodalom

1. P. L. Rijke: Notiz über eine neue Art, die Luft in einer an beiden enden offenen Röhre in Schwingungen zu versetzen. *Annalen der Physik* 107 (1859) 339–343.
2. Beke T.: Termoakusztikus projekt feladat Rijke-cső vizsgálatára. *Fizikai Szemle* 59/7–8 (2009) 253–257.
3. Beke T.: Termoakusztikus jelenségek vizsgálata iskolai projekt feladatban. *A fizika tanítása* 17/4 (2009) 7–14.
4. T. Beke: Observation of thermoacoustic phenomena in school project. *Physics Education* 44/5 (2009) 536–548.
5. T. Beke: Thermoacoustic school project. *Acta Didactica Napocensia* 2/2 (2009) 9–24.
6. K. I. Matveev: *Thermoacoustic Instabilities in the Rijke Tube: Experiments and Modeling*. PhD thesis. (2003) California Institute of Technology, Pasadena, CA.
7. F. E. C. Culick: Nonlinear behavior of acoustic waves in combustion chambers, Parts I and II. *Acta Astronautica* 3 (1976) 714–757.
8. F. E. C. Culick: A note on ordering perturbations and insignificance of linear coupling in combustion instabilities. *Combustion Science and Technology* 126 (1997) 359–379.
9. Budó Á.: *Kísérleti fizika I*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1997.