

ronrendszerekben fellépő szingularitások magyarázatát. Ezen eredményekből írta akadémiai doktori értekezését 1978-ban, illetőleg egy angol nyelvű összefoglaló munkát is, amelyre eddig több mint 1400 hivatkozás található. A fenti eredményeket 1980-ban Állami Díjjal is elismerték, amelyet *Menyhárd Nórával* és Zawadowski Alfréddal megosztva kapott.

Az utóbbi évtizedekben munkássága elsősorban az alacsony dimenziós mágneses rendszerek viselkedésének megértésére irányult. Különböző spinláncok és létraszerűen csatolt mágneses atomokat tartalmazó anyagok lehetséges fázisainak és kvantum fázisátalakulásainak vizsgálatánál ért el fontos eredményeket, valamint tevékenyen hozzájárult az utóbbi évek egyik legígéretesebb numerikus módszerének, a sűrűségmátrixon alapuló renormálási csoport módszer továbbfejlesztéséhez is.

Külföldön neve széles körben ismert és elismert. Éveket töltött olyan vezető intézetekben, mint a moszk-

vai Landau Intézet, a grenoble-i Laue-Langevin Intézet, az Illinois-i és a Lausanne-i Egyetem. Hazai oktatási tevékenységét évtizedek óta az ELTE TTK Fizikai Intézetében fejti ki, amelynek összefoglalása az a három kötetes, több mint kétezer oldalas szilárdtestfizika könyv, amelynek angol nyelvű változata a Springer kiadónál jelent meg.

Sólyom Jenő mindig nagy gondot fordított a fiatalokkal való foglalkozásra, egykori tanítványai közül ma többen az MTA tagjai és doktorai. Ugyancsak aktívan részt vett és vesz a fizikus közéletben. Elnöke volt az Eötvös Loránd Fizikai Társulatnak, elnöke az OTKA Fizika Zsűrinek és évekig tagja az MTA Doktori Tanácsának.

Sólyom Jenő köszöntésére 2010. november 19-én az MTA Fizikai Tudományok Osztálya előadóülést szervezett, amelyen egykori munkatársai és tanítványai beszéltek legújabb tudományos eredményeikről.

Iglói Ferenc

Ez évi szeptemberi számunk három írásában szereplő képletek a „nyomda ördöge” csúf játékából hiányosan, érthetetlenül jelentek meg. A szerzőktől és az olvasóktól is elnézést kérve, az eredeti oldalszámozást és tördelést is megtartva újraközöljük ezeket a cikkeket.

A szerkesztők és a nyomda

GRAVITÁCIÓ ÉS GRAVITOMÁGNESÉG

Vető Balázs

ELTE TTK Anyagfizikai Tanszék

A testek közötti gravitációs, illetve az elektromos töltések között fellépő Coulomb-kölcsönhatás erős formai hasonlóságot mutat. Mozgó töltések kölcsönhatása során a Coulomb-erő mellett mágneses, úgynevezett Lorentz-erő is fellép. Kevésbé közismert, hogy mi történik két mozgó tömeg kölcsönhatása esetén. A cikkben áttekintjük, mit mond a mozgó tömegek kölcsönhatásáról a klasszikus fizika, a speciális és az általános relativitáselmélet.

A klasszikus fizika kísérleti tapasztalat alapján ismerte meg az elektromos töltések között fellépő elektromos, vagy Coulomb-kölcsönhatást (1785) és a mágneses testek között fellépő mágneses kölcsönhatást. Oersted kísérlete (1820) óta tudjuk, hogy a mágneses kölcsönhatást is elektromos töltések idézik elő. A kizárólag mozgó töltések között fellépő mágneses kölcsönhatást úgy értelmezzük, hogy a mozgó töltések (áramok) maguk körül mágneses teret hoznak létre, és ebben a térben mozgó elektromos töltésekre mágneses, vagy más néven Lorentz-erő hat.

A testek közötti tömegvonzás törvénye is kísérleti alapon született. Newton 1666-ban a hold mozgásából és a testek földfelszíni szabadesése alapján felállított törvényét Cavendish híres kísérlete csak 1798 körül igazolta. Kizárólag mozgó tömegek között fellépő kölcsönhatásra utaló kísérleti megfigyelést vagy el-

méleti előrejelzést a klasszikus fizika nem mutatott fel. Meg kell jegyezni, hogy 1870 környékén *Holzmueller* és *Tisserand* felvetették, hogy a Merkúr perihélium-elfordulásának a klasszikus égi mechanika által nem magyarázható részét mozgó tömegek között fellépő erő okozza. Egy ilyen erő a mozgó töltések között fellépő Lorentz-erő gravitációs hasonmása lenne. Ez az elképzelés, elméleti és kísérleti alátámasztás híján, kidolgozatlan hipotézis maradt.

Az alábbiakban áttekintjük azt, hogyan kezeli mozgó tömegek kölcsönhatását a klasszikus fizika, a speciális, illetve az általános relativitáselmélet.

A gravitáció klasszikus leírása

A klasszikus fizika a tömegvonzás törvényét két tömegpont gravitációs kölcsönhatásának mennyiségi leírásával adja meg:

$$\mathbf{F}_G = -\frac{G m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r}. \quad (1)$$

Az \mathbf{F}_G jelenti az m_1 által az m_2 tömegpontra kifejtett gravitációs vonzóerő vektorát, \mathbf{r} pedig az m_1 tömegpontból az m_2 -be mutató vektort. Az m_1 tömegpont gravitációs térerősségét a

$$\mathbf{g} = -\frac{G m_1}{r^3} \mathbf{r} \quad (2)$$

egyenlettel bevezetve \mathbf{g} jelenti az m_1 tömegpont által az \mathbf{r} helyen létrehozott gravitációs teret. A \mathbf{g} gravitációs térerősségvektorral kifejezve az m_2 tömegpontra ható gravitációs vonzóerő felírható $\mathbf{F}_G = m_2 \mathbf{g}$ alakban is.

A gravitációs törvény szerint a két tömegpont által egymásra kifejtett gravitációs erő csak azok tömegétől és távolságától függ és nem függ a kölcsönható testek sebességétől. A gravitációs kölcsönhatás ebben erős formai hasonlóságot mutat az elektromos kölcsönhatással, mivel két pontszerű, q_1 és q_2 töltésű, \mathbf{v}_1 és \mathbf{v}_2 sebességgel mozgó test egymásra kifejtett elektromos hatása,

$$\mathbf{F}_C = \frac{k q_1 q_2}{r^3} \mathbf{r} \quad (3)$$

sem függ a töltött testek sebességétől. A hasonlóság mellett létezik egy lényeges eltérés két tömegpont gravitációs, illetve két ponttöltés elektromos kölcsönhatása között. Ellentétben a mozgó tömegekkel, mozgó töltések között fellép egy

$$\mathbf{F}_L = \frac{\mathbf{v}_2 \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{F}_C)}{c^2} \quad (4)$$

mágneses Lorentz-erő is. A klasszikus fizika a mágneses kölcsönhatást az elektromos kölcsönhatástól függetlenül, önálló jelenségként kezeli, annak ellenére, hogy a (4) egyenlet kapcsolatot teremt két ponttöltés közt fellépő Coulomb- és Lorentz-erő között.

A klasszikus tárgyalás nem ismer mozgó tömegek gravitációs kölcsönhatásakor fellépő, sebességfüggő gravitomágneses erőt. Az elektromos és gravitációs kölcsönhatás formai hasonlósága elektromágneses mintára sugallhatta egy

$$\mathbf{F}_{GL} = \frac{\mathbf{v}_2 \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{F}_G)}{c^2} \quad (5)$$

alakban felírható gravitomágneses „Lorentz-erő” létét, de egy ilyen erő felvetése csak spekuláció, mivel az elmélet ilyen erőt nem jósol, és annak létét (ellentétben az elektromágneses Lorentz-erővel) kísérleti tapasztalat sem igazolja. Megjegyezzük, hogy ilyen gyenge kölcsönhatás a 19. században kísérletileg nem volt kimutatható.

A speciális relativitáselmélet – a gravitáció Lorentz-invarianciája

A speciális relativitáselmélet kimondja az inerciarendszerek egyenértékűségét, miszerint a fizikai jelenségek bármely két inerciarendszerből nézve azonosan mennek végbe. A speciális relativitáselmélet szerinti leírásban elvárjuk, hogy a gravitáció épp úgy, mint az elektromos

vagy a mágneses kölcsönhatás, azonosan menjen végbe bármely inerciarendszerben. Vizsgáljuk meg, hogyan teljesül az egyenértékűség az előbb felsorolt három jelenségre. Kezdjük az elektromos kölcsönhatással.

A mozgó testek mozgásirányú méretének rövidülése (Lorentz-kontrakció) következtében a speciális relativitáselmélet szerinti felírásban módosul a mozgó töltések elektromos és mágneses terének klasszikus fizikában felírt alakja. Míg a klasszikus fizika nem tett különbséget a nyugvó és mozgó töltés tere között, a speciális relativitáselméletben módosul a mozgó töltések tere. Eltérően viselkedik a térerősség sebességgel párhuzamos, illetve arra merőleges komponense.

Az elektromos és mágneses kölcsönhatás relativisztikus leírása azzal a figyelemre méltó tulajdonsággal rendelkezik, hogy két töltés között fellépő elektromos és mágneses erő csak együttesen tesz eleget a Lorentz-invariancia feltételnek, vagyis annak, hogy bármely két inerciarendszerből megfigyelve azonos jelenséget mutatnak. Ez a felismerés a speciális relativitáselméletben elválaszthatatlanná teszi az elektromos és mágneses kölcsönhatást, csak együtt léteznek, és egyetlen jelenséget, az elektromágneses kölcsönhatást képezik. Egy korábbi cikkben [1] megmutattam, hogy a mágneses kölcsönhatás léte következik az elektrosztatikából és a speciális relativitáselméletből.

A mozgó tömegek gravitációs tere is módosul a speciális relativitáselméletben. A \mathbf{v}_1 sebességgel mozgó m_1 tömegpont gravitációs terének sebességre merőleges, illetve párhuzamos komponensei:

$$\mathbf{g}_\perp = \gamma_1^2 \mathbf{g}_{0\perp}, \quad \text{illetve} \quad \mathbf{g}_\parallel = \gamma_1 \mathbf{g}_{0\parallel}, \quad (6)$$

ahol a \mathbf{g}_0 a nyugvó m_1 tömegpont gravitációs terét jelöli és

$$\gamma_1 = \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ezek után vizsgáljuk meg a mozgó m_1 , m_2 tömegpontok relativisztikus gravitációs kölcsönhatását. A v_1 sebességgel mozgó m_1 tömegpont a (6) egyenlettel felírt \mathbf{g} relativisztikus gravitációs terében v_2 sebességgel mozgó m_2 tömegpont kinetikus energiájának tömege is részt vesz a kölcsönhatásban, tehát a relativisztikus gravitációs erő:

$$\mathbf{F}_G = \gamma_2 m_2 \mathbf{g}. \quad (7)$$

Egyszerű Lorentz-transzformációval megállapítható, hogy a (7) egyenletben felírt gravitációs kölcsönhatás nem Lorentz-invariáns. A speciális relativitáselmélet viszont előírja, hogy az inerciarendszerek egyenértékűek, tehát ha érvényes a speciális relativitás, akkor a gravitáció jelenségének is Lorentz-invariánsnak kell lenni. Tegyük Lorentz-invariánssá a gravitációt! Az eljárás lényege, hogy kiegészítjük a gravitációs kölcsönhatást egy \mathbf{F}_R ismeretlen additív taggal és ezzel felírjuk az \mathbf{F}_{RG} Lorentz-invariáns gravitációs kölcsönhatást az új taggal bővített formában:

$$\mathbf{F}_{\text{RG}} = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_R. \quad (8)$$

A kapott erőt Lorentz-transzformáció segítségével egyenlővé tesszük m_2 nyugalmi rendszerében mért gravitációs erővel. Az így kapott egyenletből az ismeretlen erőtag meghatározható. A számolást és a transzformációt elvégezve az ismeretlen erőtagra kapott eredmény $v_1 v_2 / c_2$ első hatványa szerinti közelítésben:

$$\mathbf{F}_R = 2 \frac{\mathbf{v}_2 \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{F}_G)}{c^2}. \quad (9)$$

A kapott eredmény fontos. Azt jelenti, hogy az inerciarendszerek csak akkor egyenértékűek a gravitációra nézve, ha létezik egy, a mozgó tömegek között fellépő erőhatás, amit az elektromágnességgel mutatott formai analógia miatt nevezhetünk gravitációs, vagy gravitomágneses Lorentz-erőnek. A (9) egyenletben kapott, a gravitáció Lorentz-invarianciáját biztosító erő éppen kétszerese az (5) egyenletben, a klasszikus fizikában az elektromágneses analógia alapján felvetett gravitációs Lorentz-erőnek. Ennek oka, hogy a gravitációs kölcsönhatásban szerepet játszik a mozgó test mozgási energiájának tömege is, míg az elektromos kölcsönhatásban a mozgási energia nem játszik szerepet. A (9) egyenletben bemutatott eredménnyel megegyező gravitomágneses Lorentz-erő létét a speciális relativitáselmélet alapján, más módszerrel vezeteli *Karlsson* [2].

A (9) egyenletben kapott eredmény értékelésekor nem szabad elfelejteni, hogy a speciális relativitáselmélet nem írja le pontosan a gravitáció jelenségét, így a fenti eredmény is pontatlan egy kettes faktor mértékben – bár jobb a klasszikus fizikai leírásnál. Ez a legfőbb oka annak, hogy a speciális relativitáselmélet által jóslott gravitomágneses Lorentz-erő nem került a tankönyvekbe. A fenti gondolatmenetben bemutatott gravitomágneses Lorentz-erő inkább módszertani értékű és az eredményt a klasszikus fizikához történő összehasonlításra, annak pontatlanságával együtt kell kezelni. A gravitomágnesség pontosabb közelítése az általános relativitáselméletből származtatható.

Az általános relativitáselmélet és a gravitomágnesség

A gravitáció jelenségének merőben új felfogását hozta az 1915-ben megjelent általános relativitáselmélet. A négydimenziós sík téridőt a benne lévő tömegek „meggörbítik” és a gravitáció jelenségét az általános relativitáselmélet a görbült téridő hatásaként értelmezi. A görbült téridő szemlélet szerint a testek nem fejtenek ki egymásra gravitációs erőt. A görbült téridőben az erőhatásmentes testek úgynevezett geodetikus görbék mentén mozognak. Két test gravitációs kölcsönhatásakor az egyik test a másik által meggörbített téridő egy geodetikusa mentén mozog. Ebben a

szemléletben nincs helye a gravitációs erőt kiegészítő gravitomágneses kölcsönhatásnak sem.

Az általános relativitáselméletben a görbült téridő szemlélet mellett, gyenge gravitációs tér és kis sebességek ($\Phi, v \ll c^2$) esetén, Φ/c^2 , illetve v^2/c^2 tagok magasabb kitevőjű hatványainak elhanyagolásával tartható az erőszemlélet is. Ebben az esetben a négyes ívhossz integráljának segítségével felírt, közelítő Lagrange-függvény deriválásával juthatunk a mechanikában megszokott mozgásegyenlethez. Két, m_1, m_2 tömegű, egymás gravitációs hatása alatt $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sebességgel mozgó tömegpont Lagrange-függvénye Φ/c^2 , illetve v^2/c^2 szerinti első rendű közelítésben:

$$L = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{G m_1 m_2}{r} + \frac{m_1 v_1^4 + m_2 v_2^4}{8 c^2} + \frac{G^2 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{2 c^2 r^2} + \frac{G m_1 m_2}{2 c^2 r} \left[3 (v_1^2 + v_2^2) - 7 (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2) - \frac{(\mathbf{v}_1 \mathbf{r})(\mathbf{v}_2 \mathbf{r})}{r^2} \right]. \quad (10)$$

A Lagrange-függvényből előállított mozgásegyenletben az

$$\mathbf{F}_G = \frac{G m_1 m_2 \mathbf{r}}{r^3}$$

vezető tag mellett megjelennek sebességtől függő erőtagok is, így más tagok mellett az

$$\mathbf{F}_{\text{GL}} = 4 \frac{\mathbf{v}_2 \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{F}_G)}{c^2} \quad (11)$$

erő is, amely a gravitomágneses Lorentz-erő általános relativitáselméletből származó alakja. Az általános relativitáselmélet alkalmazása, amely figyelembe veszi, hogy gravitációs térben az órák lassabban járnak és a méterrudak megrövidülnek, arra az eredményre vezet, hogy gyenge gravitációs tereknek és kis sebességeknek megfelelő közelítés esetén a gravitációs kölcsönhatásnak része egy, a mozgó tömegek között fellépő gravitomágneses Lorentz-erő, amely kétszer akkora, mint a speciális relativitáselmélet által jóslott hatás.

Diszkusszió a gravitomágnességről

A gravitomágnesség fogalma megtalálható az általános relativitáselmélet tankönyvekben. *Wald* [3] a gravitáció lineáris közelítése kapcsán vezeti be a jelenséget és a gravitomágnesség térjellemzőjét, a gravitomágneses térerősséget. A gravitomágnesség két térjellemzővel, a \mathbf{g} gravitációs térerősséggel és a \mathbf{b} gravitomágneses térrel jellemezhető. *Mashboon* [4] levezeti és összefoglalja a gravitomágnesség Maxwell-egyenleteit. Zárójelben az elektromágnesség Maxwell-egyenletei láthatók.

$$\text{rot } \mathbf{g} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \quad (12)$$

$$\left(\text{rot } \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)$$

$$\text{rot } \frac{\mathbf{b}}{2} = -\frac{4\pi G}{c^2} \mathbf{j}_m + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \quad (13)$$

$$\left(\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi k}{c^2} \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

$$\text{div } \mathbf{g} = -4\pi G \rho_m \quad (14)$$

$$(\text{div } \mathbf{E} = 4\pi k \rho)$$

$$\text{div } \frac{\mathbf{b}}{2} = 0 \quad (15)$$

$$(\text{div } \mathbf{B} = 0),$$

ahol \mathbf{j}_m a tömegáram-sűrűséget, ρ_m pedig a tömegsűrűséget jelöli az adott vonatkoztatási rendszerben. Az egyenletek alapján látható, hogy a gravitomágnesség hasonlóságot mutat az elektromágnességgel. A gravitomágneses teret mozgó tömegek, az elektromágneses teret mozgó töltések keltik. Különbség a gravitomágnesség és az elektromágnesség között, hogy a \mathbf{b} gravitomágneses teret a mozgó tömeg kétszerese kelti és a benne mozgó tömegek duplájára fejt ki hatását. Ezért szerepel a (12)–(15) egyenletekben a $\mathbf{b}/2$ kifejezés. A gravitomágneses Maxwell-egyenletek tartalmazzák a gravitomágneses indukció jelenségét; az időben változó gravitációs tér gravitomágneses teret indukál és fordítva, az időben változó gravitomágneses tér gravitációs örvényteret kelt. A két jelenség magában hordozza a fénysebességgel terjedő gravitomágneses vagy közismertebb nevükön gravitációs hullámok létének lehetőségét. A (13) egyenletből stationárius gravitációs tér esetén következik a mágneses Biot-Savart-törvény, annak segítségével felírható a \mathbf{v}_1 sebességgel mozgó m_1 tömegű tömegpont által gerjesztett gravitomágneses tér:

$$\mathbf{b} = 2 \frac{G m_1}{c^2 r^3} \mathbf{v}_1 \times \mathbf{r}. \quad (16)$$

A gravitomágneses térben \mathbf{v}_2 sebességgel mozgó m_2 tömegpontra pedig

$$\mathbf{F}_{\text{GL}} = 2 m_2 \mathbf{v}_2 \times \mathbf{b} \quad (17)$$

gravitomágneses Lorentz-erő hat. A (16) egyenletet (17)-be helyettesítve megkapjuk a gravitomágneses Lorentz-erő (11) egyenletben felírt alakját:

$$\mathbf{F}_{\text{GL}} = 4 \frac{G m_1 m_2}{c^2 r^3} \mathbf{v}_2 \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{r}). \quad (18)$$

A gravitomágneses térben lévő gravitomágneses dipólusra

$$\mathbf{M} = 2 m_G \times \mathbf{b}. \quad (19)$$

forgatónyomaték hat. Gravitomágneses dipólus minden forgó test. A gravitomágneses dipólusmomentum pedig épp a forgó test impulzusmomentumának a fele, tehát

$$\mathbf{M} = \mathbf{N} \times \mathbf{b}. \quad (20)$$

A forgatónyomaték elfordítja a gravitomágneses térben lévő szabad pörgettyűk, mint gravitomágneses dipólusok forgástengelyét, azokat precessziós mozgásra készíti. A *Fizikai Szemlében* Hráskó Péter [4] által ismertett Gravity Probe B kísérletben épp a Föld gravitomágneses tere készíti precesszióra a körpályán mozgó mesterséges hold fedélzetén elhelyezett, szabad felfüggesztésű pörgettyűket. A pörgettyűk mozgásában tapasztalt precesszió mértéke pontosan megegyezik a gravitomágneses hatás által várható értékkel. Ezzel a Gravity Probe B kísérlet nem csak a globális inerciarendszerek tagadásának, hanem a gravitomágnesség létének is bizonyítéka volt.

Meg kell jegyezni, hogy a gravitomágnesség nem tartalmazza az általános relativitáselmélet lineáris közelítésének összes, a mozgó tömegek között fellépő kölcsönhatását. Két mozgó tömegpont gravitációs kölcsönhatását az általános relativitáselmélet szerinti lineáris közelítésben leíró (10) egyenletben felírt Lagrange-függvényből levezetett mozgásegyenletek olyan erőket is tartalmaznak, amelyek nem a v_1 és v_2 sebességek szorzatát, hanem a v_1 vagy v_2 sebességek második hatványát tartalmazzák. Ilyen erők következménye például a Merkúr perihélium-mozgásának relativisztikus része, amely az általános relativitáselméletből igen, de a gravitomágnességből nem következik.

Végezetül megállapíthatjuk, hogy a klasszikus fizika nem ismeri a gravitomágnességet. A speciális relativitáselmélet szerint, az inerciarendszerek ekvivalenciája miatt szükséges, hogy az $1/r^2$ -es erők mellett létezzen egy, a mozgó objektumok között fellépő mágneses erő. Ez mind az elektromos, mind a gravitációs kölcsönhatásra igaz. Mivel a speciális relativitáselmélet – az elektromossággal ellentétben – nem kezeli pontosan a gravitációt, az általa megállapított gravitomágneses erő is pontatlan. Az általános relativitáselmélet a gravitomágnességet csak kis sebességekre és gyenge gravitációs terekre érvényes közelítésként, de kvantitatíven helyesen használja. Ez a közelítés a Naprendszer objektumaira, az ott elhelyezett laboratóriumokra jól használható.

Irodalom

1. Vető B.: Az elektromos kölcsönhatás a speciális relativitáselmélet szemszögéből. *Fizikai Szemle* 59/4 (2009) 127.
2. A. Karlsson: LUTEDX/(TEAT-7150)/1-7} 2006. <http://www.es.lth.se/teorel/Publications/TEAT-7000-series/TEAT-7150.pdf>
3. R. M. Wald: *General Relativity*. The University of Chicago Press, Chicago, 1984. 66–90.
4. B. Mashhoon B.: gr-qc/0011014v1 2000. (Preprint)
5. Hráskó P.: A GP-B kísérlet. *Fizikai Szemle* 57/6 (2007) 181.