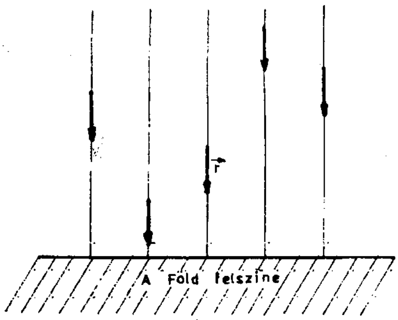
Ismerd meg!

Űrhajópályák a Föld térségében

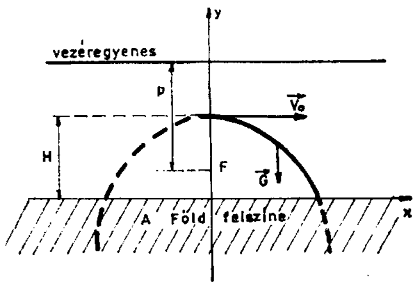
I. rész

1. Vízszintes hajítás homogén gravitációs mezőben

A homogén gravitációs teret egyenlő távolságra levő párhuzamos térerősségvonalak jellemzik, s a $\vec{\Gamma} = \vec{g}$ térerősség (gravitációs gyorsulás) értéke a tér bármely pontjában ugyanaz. A Föld felszínének a szomszédságában, nem nagy kiterjedésű terület esetében, bolygónk gravitációs tere is homogénnek tekinthető (1.ábra).



1. ábra



2. ábra

A Föld felszínével párhuzamos $\vec{v_0}$ kezdősebességű tömegpont mozgását Newton II. axiómája írja le (2.ábra):

$$\vec{G} = m\vec{a}.$$

Ha a $\vec{G}$ erőt vetítjük az Ox és Oy tengelyekre:

$$\begin{cases} 0 = ma_x \\ -G = ma_y \end{cases}, \text{ ahonnan } \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}.$$

Tehát, az Ox tengely mentén a mozgás $v_x = v_0$ sebességű egyenletes, míg az Oy tengely mentén $v_y = -gt$ sebességű egyenletesen változó.

A két iránynak megfelelő mozgásegyenlet:

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = H - \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

E két egyenletből az idő kiküszöbölésével a pálya egyenletéhez jutunk:

$$y = -\frac{g}{2{v_0}^2} \cdot x^2 - H.$$

Ez az egyenlet egy „függőleges" tengelyű parabolát ábrázol (2.ábra), paramétere $p=\dfrac{1}{2\left|-\dfrac{g}{2v_0^2}\right|}=\dfrac{v_0^2}{g}$ és ágai „lefelé" mutatnak.

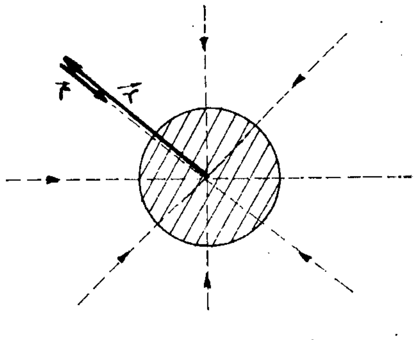
A parabola csúcsa épp a mozgás kezdőpontjában van, míg fókuszának koordinátái: $F\left(0;H-\dfrac{v_0^2}{g}\right)$.

2. Vízszintes hajítás centrális gravitációs mezőben

Az M tömegű anyagi pont (vagy gömb alakú test) által létesített centrális gravitációs mezőt az egy pontba összefutó egyenes térerősségvonalak ábrázolják, az erőtér intenzitása a tér valamely pontjában (3.ábra):

$$\vec{\Gamma}=-k\cdot\frac{M}{r^3}\cdot\vec{r}.$$

Ilyen gravitációs mező a jelen esetben a gömbszerűnek tekintett Föld által létrehozott gravitációs tér is.

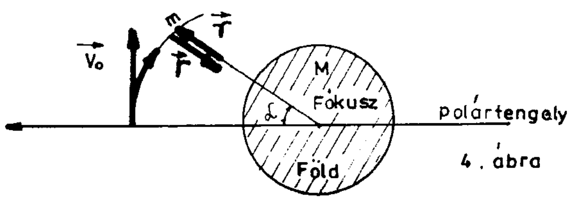


3. ábra

Centrális mezőben mozgó m tömegű anyagi pont $\vec{L}$ impulzusnyomatéka a Föld középpontjára vonatkoztatva, állandó. Ez a megállapítás mindjárt az impulzusnyomaték változásának tételéből $\left(\dfrac{d\vec{L}}{dt}=\vec{r}\times\vec{F}\right)$ adódik, mert $\left|\vec{r}\times\vec{F}\right|=rm\Gamma\sin 180^\circ=0.$ Következik: $\vec{L}$=állandó, ami azt jelenti, hogy a mozgó anyagi pont pályája egy bizonyos síkban van, vagyis síkgörbe. Ez az $\vec{L}=\vec{r}\times\left(m\vec{v}\right)=\textit{állandó}$ összefüggésből látszik, hisz $\vec{r}$ állandóan az $\vec{L}$-re merőleges vektor.

Minthogy a gravitációs mező konzervatív erőtér; ebben a térben történő mozgás esetében az E mechanikai energia állandó (érvényesül a mechanikai energia megmaradásának elve).

Ebben a gravitációs térben a függőlegesen elhajított m tömegű anyagi pontra alkalmazva a mechanikai energia megmaradás- és az impulzusnyomaték megmaradásának az elvét, olyan kúpszelet pályaegyenlethez jutunk, melynek polárkoordinátás alakja (4. ábra):



4. ábra

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\alpha}, \text{ ahol}$$

$\vec{r}$ – a Föld középpontjából kiinduló helyzetvektor,

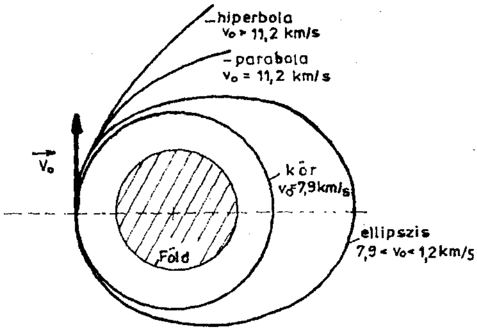
α – a helyzetvektor és a polártengely által alkotott szög,

$p = \dfrac{L^2}{m^2 kM}$ a pálya paraméter,

$e = \sqrt{1 + \dfrac{2 \cdot L^2 \cdot E}{m^2 \cdot k \cdot M}}$ a pálya excentricitása.

Az e excentricitás (v_0 kezdősebesség) értékétől függően lehet a pálya (5. ábra):

- kör, ha e=0,
- ellipszis, ha 0<e<1,
- parabola, ha e=1,
- hiperbola, ha e>1.



5. ábra

A körpályához tartozó v_0 kezdősebességet első kozmikus sebességnek nevezzük és a Föld felszínére vonatkoztatott értéke: 7,9 km/s.

A parabolikus pályához tartozó v_0 kezdősebességet második kozmikus sebességnek nevezzük, s értéke a Föld felszínére vonatkoztatva: 11,2 km/s.

Megjegyzés: Ha feltételezzük, hogy a nehézségi erőteret önmagukkal párhuzamos erővonalak jellemzik – és ez kis távolságon belül igaz is –, a kapott pálya parabola, ahogy azt az 1. paragrafusban láttuk.

Ez a parabola a valóságos pályának (ellipszisnek) csak megközelítése a Föld közelében.

3. Elliptikus pályák a Föld körül

Zárt pályán (ellipszis vagy kör) a Föld körül keringő ember által alkotott tárgyat (technikai berendezést) műholdnak nevezzük.

Bármely H műhold olyan elliptikus pályát ír le, amely egyik fókuszában a Föld van (6.ábra).

A pálya Földhöz viszonyított legközelebbi P pontját perigeumnak, míg a legtávolabbi A pontját apogeumnak nevezzük.

Az ellipszis egyenlete:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\alpha};\ 0<e<1.$$

Az $\alpha=0°$ értékére $r_{\min} = \dfrac{p}{1+e}$, míg $\alpha=180°$-ra $r_{\max} = \dfrac{p}{1+e}$.

E két utóbbi összefüggésből:

$$a = \frac{r_{\max} + r_{\min}}{2} \text{ (félnagytengely),}$$

$$c = \frac{r_{max} - r_{min}}{2} \text{ (fókusztávolság)},$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{r_{max} \cdot r_{min}} \text{ (félkistengely)},$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}} \text{ (pálya excentricitás)},$$

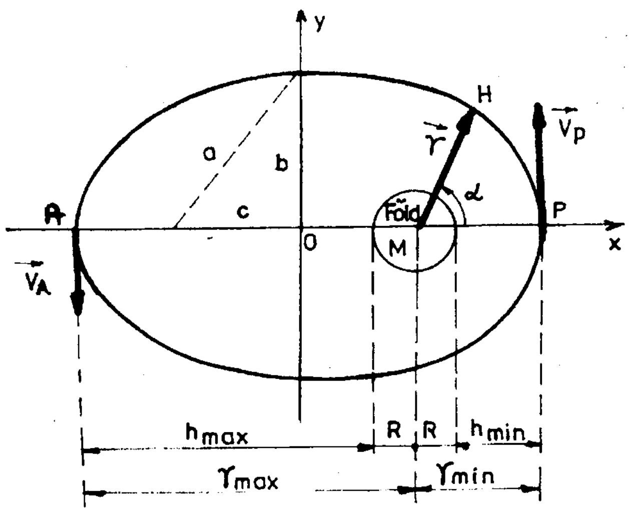
$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{2r_{max} \cdot r_{min}}{r_{max} + r_{min}} \text{ (pálya paraméter)}.$$

Az a, b, c, e és p értékeit a pálya elemeinek nevezzük.
Az elliptikus pályához tarozó periódus:

$$T = 2\pi a \sqrt{\frac{a}{kM}}.$$

A sebesség értéke:

- perigeumban: $v_p = \frac{b}{r_{min}} \sqrt{\frac{kM}{a}}$,
- apogeumban: $v_A = \frac{b}{r_{max}} \sqrt{\frac{kM}{a}}$.



6. ábra

Ferenczi János
Nagybánya