



Rejtő Sándor



Geleji Sándor



Kovács István

Végül megemlítem a szilárd testek plaztikus deformációját és a diszlokációk kontinuum-modelljét kutató *Kovács István* (1933–2011) fizikust, az Eötvös Loránd Tudományegyetem tanszékvezető egyetemi tanárát. Érdemei közé tartozik, hogy (*Pattantyúst*, *Kaliskyt* követően) nagy sikerű magyar nyelvű tankönyvet írt a képlékeny alakváltozásról. Kovács-Zsoldos: *Diszlokációk és képlékeny alakváltozás* (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1965). A könyv később angol nyelvű változatban is megje-

lent a Pergamon Press és az Akadémiai Kiadó gondozásában és jelentős nemzetközi sikert aratott.

## A hazai műhely

Megemlékezünk még néhány magyar tudósról, akik szintén jelentős érdemeket szereztek a képlékenységgel kapcsolatos kutatások terén.

Rejtő Sándorról, a József Nádor Műegyetem rektoráról, a Magyar Anyagvizsgálók Egyesületének alapítójáról már volt szó.

*Geleji Sándor* (1898–1967) kohómérnök, egyetemi tanár kidolgozta az első olyan eljárást, amellyel a hengerléskor ébredő erők és teljesítményszükségletek kellő pontossággal kiszámíthatók. Kidolgozta a csőhengerlés elméletét, a hűtőpadok méretezésének alapelveit. 1966-ban jelent meg *A fémek képlékeny alakításának elmélete* című könyve.

## Irodalom

- E. Orowan: Zur Kristallplastizität I–III. *Zeitschrift für Physik* 89 (1934) 605–659.
- M. Polányi: Über Eine Art Gitterstörung, die einen Kristall plastisch machen könnte. *Zeitschrift für Physik* 89 (1934) 660–664.
- G. I. Taylor: The mechanism of plastic deformation of crystals. Part I. – Theoretical. *Proc. Royal Society London* 145 (1934) 362–387.
- Kovács I., Zsoldos L.: *Diszlokációk és képlékeny alakváltozás*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1965.
- Juhász A., Kovács I.: *A szilárdtestek kristályszerkezete. Kristálybi-bák*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985.
- Voith M.: *A képlékenyalakítás elmélete – Nagy alakváltozások tana*. Miskolc, Egyetemi Kiadó, 1998.
- K. Osakada: History of Plasticity and Metal Forming Analysis. *ICTP 2008* (The 9th International Conference on Technology of Plasticity)

## A FIZIKA TANÍTÁSA

# A MÁGNESES VEKTORPOTENCIÁL, MINT VALÓSÁGOSAN LÉTEZŐ VEKTORMEZŐ

Hárs György, Varga Gábor  
BME Fizikai Intézet

A legszélesebb körben alkalmazott elektrotechnikai eszköz a transzformátor, amely alapértelmezésben két galvanikusan független tekercsből áll. A tekercsek geometriai kialakítása lehet szolenoid vagy toroid jellegű. A tekercsek szoros mágneses csatolásban állnak. Tekintsük azt az esetet, amikor a szekunder tekercs belsejében helyezkedik el a primer. Az általánosan elfogadott elmélet szerint a szekunder tekercsben indukált feszültség forrása a primer tekercs által létrehozott mágneses fluxus megváltozása. Ezzel a magyarázattal azonban az a probléma, hogy a primer tekercsen kívül, a szekunder tekercs helyén gyakorlatilag nincsen mágneses tér, így a mágneses fluxus és annak változása is csak a primer tekercs belsejére

korlátozódik. Ennek dacára a szekunder tekercsben mindig megjelenik az indukált feszültség.

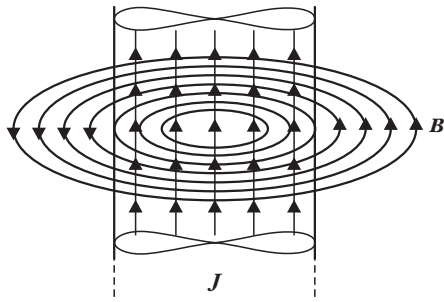
Ezt a ellentmondást oldja fel a mágneses vektorpotenciál. Ismert a harmadik Maxwell-egyenlet, amely a  $\mathbf{B}$  mágneses indukció forrásmentességét írja le.

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Ezen kívül ismert a következő vektoranalitikai összefüggés:

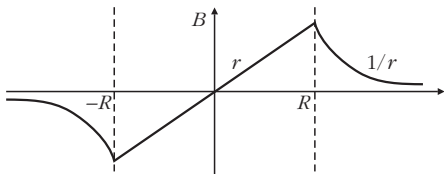
$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) \equiv 0.$$

Vagyis egy tetszőleges  $\mathbf{A}$  vektormező rotációjaként előállított vektormező divergenciája azonosan nulla.

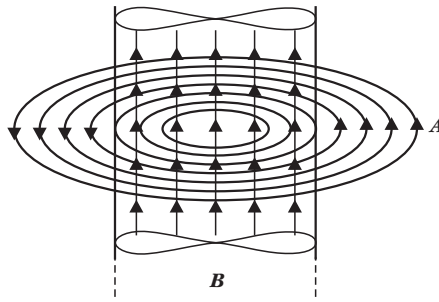


Belül:  $2 r \pi B = \mu_0 r^2 \pi j \Rightarrow B = \mu_0 \frac{j}{2} r,$

kívül:  $2 r \pi B = \mu_0 R^2 \pi j \Rightarrow B = \mu_0 \frac{j}{2} \frac{R^2}{r}.$

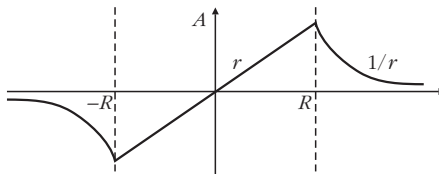


1. ábra. Gerjesztési törvény



Belül:  $2 r \pi A = r^2 \pi B \Rightarrow A = \frac{B}{2} r,$

kívül:  $2 r \pi A = R^2 \pi B \Rightarrow A = \frac{B}{2} \frac{R^2}{r}.$



2. ábra. Vektorpotenciál-örvénytér

$$\oint_g \mathbf{B} d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} d\mathbf{F}.$$

A jobb oldalon az áramsűrűség felületi integrálja jelent meg, amely a  $g$  görbén átfolyó  $I$  áramok összegével egyenlő:

$$\oint_g \mathbf{B} d\mathbf{r} = \mu_0 \sum I.$$

Ez tehát a gerjesztési törvény szokásos alakja a fent definiált esetben. Szavakban: a  $\mathbf{B}$  vektormező zárt  $g$  görbére vett görbe menti integrálja egyenlő a görbén átfolyó áramok összegével szorozva a mágneses permeabilitással.

Alkalmazzuk most a Stokes-tételt a  $\text{rot}\mathbf{A} = \mathbf{B}$  összefüggésre  $\mathbf{A} = \mathbf{v}$  helyettesítéssel:

$$\oint_g \mathbf{A} d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{F}.$$

A jobb oldalon levő felületi integrál a  $\Phi$  mágneses fluxus. Az egyenlet így írható:

$$\oint_g \mathbf{A} d\mathbf{r} = \sum \Phi.$$

Szavakban: az  $\mathbf{A}$  vektorpotenciál zárt  $g$  görbére vett görbe menti integrálja egyenlő a görbén átfolyó összes mágneses fluxussal.

Erőteljes párhuzam található a két egyenlet között. Egy görbén átfolyó áram maga körül mágneses örvényteret kelt (gerjesztési törvény, 1. ábra), míg egy görbén átfolyó mágneses fluxus maga körül vektorpotenciál örvényteret kelt (2. ábra).

Tekintsük a második Maxwell-egyenletet:

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Ez az indukciótörvény néven ismert összefüggés. Helyettesítsük be a vektorpotenciál definíciós egyenletét:

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot}\mathbf{A}).$$

Átalakítva:

$$\text{rot}\mathbf{E} = \text{rot}\left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right).$$

A rotációk egyenlőségéből természetesen nem következik azonnal az argumentumok egyenlősége, csupán az, hogy egy skalármező gradiensének erejéig különbözhetnek egymástól, mivel  $\text{rot}(\text{grad}U) \equiv 0$ , ahogy azt korábban említettük. Esetünkben ezt a gradiens-

Ha tehát a  $\mathbf{B}$  mágneses indukciót egy  $\mathbf{A}$  mágneses vektorpotenciál rotációjaként vezetjük le, akkor megszabadulunk a harmadik Maxwell-egyenlettől, mint külön feltételtől, mivel ekkor az említett matematikai azonosság garantálja a  $\mathbf{B}$  tér forrásmentességét:

$$\text{rot}\mathbf{A} = \mathbf{B}.$$

Figyelmet érdemel a vektorpotenciál egyértelműségének a kérdése. Az ismert matematikai összefüggés szerint:

$$\text{rot}(\text{grad}U) \equiv 0,$$

ahol  $U$  tetszőleges skalármező. Ezért a vektorpotenciál csupán egy tetszőleges gradiens vektortér erejéig meghatározott. Általában az additív vektormezőt nullának, míg a vektorpotenciál-mezőt forrásmentesnek tekintjük ( $\text{div}\mathbf{A} \equiv 0$ ). Ez utóbbi feltételt Coulomb-mértéknek nevezik az elméleti elektrodinamikában.

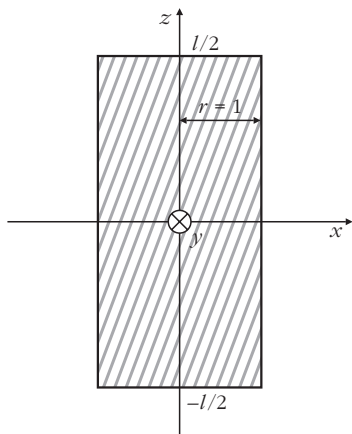
A továbbiakban mágnesezhető anyagot nem tartalmazó térben elhelyezkedő vezetőben folyó árammal foglalkozunk. Az első Maxwell-egyenlet csonkított alakja ekkor a következő:

$$\text{rot}\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j},$$

ahol  $\mu_0$  a vákuum mágneses permeabilitása,  $\mathbf{j}$  pedig az áramsűrűség vektora. Tetszőleges, differenciálható  $\mathbf{v}$  vektormezőre a Stokes-tétel állítása a következő:

$$\oint_g \mathbf{v} d\mathbf{r} = \int_S (\text{rot}\mathbf{v}) d\mathbf{F},$$

ahol a  $g$  peremgörbe irányítása jobbcsavart alkot az  $S$  nyílt felület irányításával. Alkalmazzuk a fenti matematikai tételt  $\mathbf{B} = \mathbf{v}$  helyettesítéssel:



3. ábra. A szolenoid metszete. Forgástengelye a  $z$  tengely, míg  $x$  és  $y$  a forgástengelyre merőleges síkot képez.

mezőt nullának tekintjük, és az alábbi összefüggést fogadjuk el:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Vagyis a vektorpotenciál időbeli változása hozza létre az indukált elektromos mezőt.

Felmerülhet a kérdés, hogy mágneses vektorpotenciál csupán egy számítástechnikai segédlet, amely alkalmazásával a harmadik Maxwell-egyenlet elegánsan kiküszöbölhető, vagy pedig egy valós fizikai vektormező, amelynek időbeli megváltozása kelti az indukált elektromos teret? E kérdésre hosszú ideig nem volt egyértelmű válasz, mivel egyenáramú gerjesztéssel létrehozott mágneses vektorpotenciál nem volt kimutatható az elektromos kísérletek körébe tartozó klasszikus eszközökkel. Áttörést jelentett az Aharonov–Bohm-hatás kísérleti igazolása, amelyben kvantummechanikai effektus révén sikerült kísérletileg bizonyítani az egyenáramú gerjesztéssel létrehozott mágneses vektorpotenciál létezését.

A bevezetőben említettük, hogy a szolenoid- és toroidtekercsek kívül nincsen, pontosabban elhanyagolható a mágneses tér. Ezt az állítást tapasztalati tényként szokás elfogadni, viszont valaminek a nemléte a természettudományokban igen kérdéses, mivel a logaritmikus skálának nincsen nulla pontja. Határozzuk meg tehát a szolenoid- és toroidtekercs külső és belső  $\mathbf{A}$  és  $\mathbf{B}$  terét teljes általánosságban, numerikus integrálás segítségével. Így megtudhatjuk, hogy az elhanyagolás mennyire jogos.

A munkamódszer mindkét esetben a vektoriális Poisson-egyenlet megoldásával kezdődik.

$$\Delta \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}.$$

Igazolható hogy ennek megoldása a következő:

$$\mathbf{A}(\mathbf{v}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}}{|\mathbf{v} - \mathbf{l}|} dV,$$

ahol  $\mathbf{v}$  helyvektor a futópont, míg  $\mathbf{l}$  helyvektor a gerjesztés koordinátái. A  $|\mathbf{v} - \mathbf{l}|$  kifejezés tehát a gerjesztési

tési pont és a futó pont távolsága. Az így, integrálalakban előállított  $\mathbf{A}$  vektormezőt rotációképzésnek vetjük alá, amelyből megkapjuk a  $\mathbf{B}$  vektormezőt.

Az általános integrálképlet rotációképzés után egyébként az ismert Biot-Savart-törvényt adja, ennek direkt használata azonban jóval körülményesebb, ezért nem ezt az utat választjuk.

A fenti integrálban előforduló  $\mathbf{j} dV$  kifejezés vezetékekben folyó áram esetében  $I d\mathbf{l}$  formában írható, ahol  $I$  a vezetékben folyó áram. Így a térfogati integrál a vezeték mentén haladó görbe menti integrál formájában számítható.

## A szolenoid mágneses vektorpotenciál ( $\mathbf{A}$ ) és mágneses indukció ( $\mathbf{B}$ ) terének számítása

A teljesen részletes számítás a honlapon található.

A szolenoid metszete a 3. ábrán látható. A nemnulla komponenseket az alábbiakban foglaljuk össze azzal a kiegészítéssel, hogy a nullával osztás megelőzése okán bevezetjük a  $\delta$  húzalvastagságot:

$$\frac{A_y(x, z)}{A_{\max}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\varphi}{\sqrt{D} + \delta} d\varphi \right) d\eta,$$

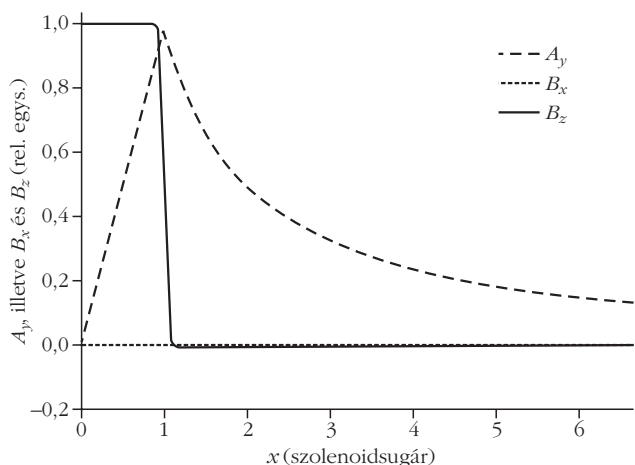
$$\frac{B_x(x, z)}{B_0} = \frac{r}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(z - \eta) \cos\varphi}{(\sqrt{D} + \delta)^3} d\varphi \right] d\eta,$$

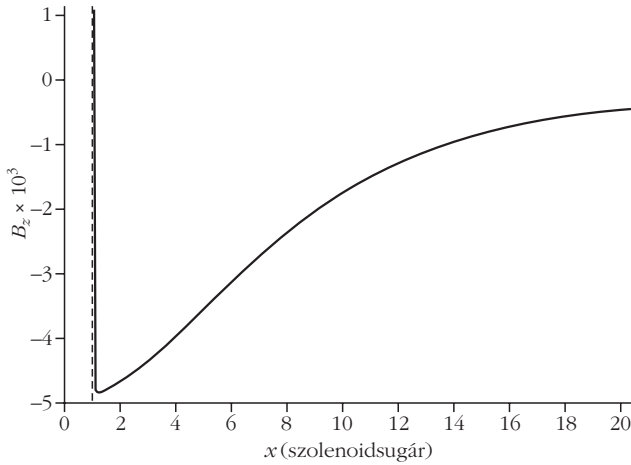
$$\frac{B_z(x, z)}{B_0} = \frac{r}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r - x \cos\varphi}{(\sqrt{D} + \delta)^3} d\varphi \right] d\eta.$$

A numerikus számításoknál (4. és 5. ábra) a következő paramétereket alkalmaztuk: a szolenoid sugara az egység  $r = 1$ , hossza  $l = 20$ , húzalvastagság  $\delta = 10^{-2}$ .

Vegyük észre, hogy a szolenoidon kívül ellentétes irányú a  $B_z$  tér, mivel az erővonalak körbezáródnak!

4. ábra.  $A_y$ ,  $B_x$  és  $B_z$  komponensek az  $x$  pozíció függvényében  $z = 0$  helyen (a szolenoid közepén).





5. ábra.  $B_z$  komponens a szolenoidon kívül, az  $x$  pozíció függvényében ezerszeres nagyításban  $z = 0$  helyen (a szolenoid közepén).

Ami a tekercs belsejében felfelé haladt az kívül lefelé mutat. A tér körülbelül a tekercs hosszának megfelelő távolságban elhanyagolható mértékűre csökken.

## A toroid mágneses vektorpotenciál ( $\mathbf{A}$ ) és mágneses indukció ( $\mathbf{B}$ ) terének számítása

A teljesen részletes számítás a honlapon található.

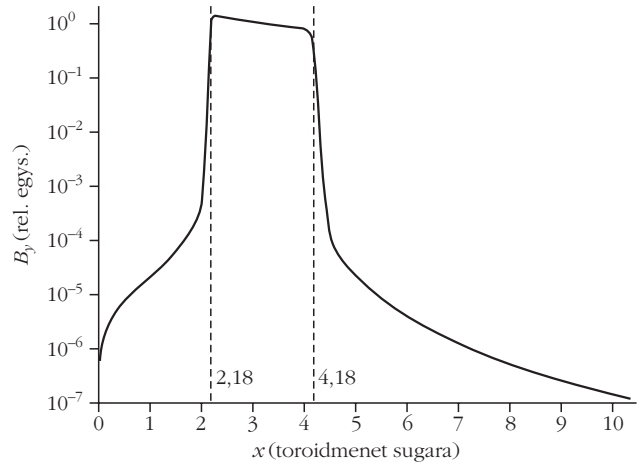
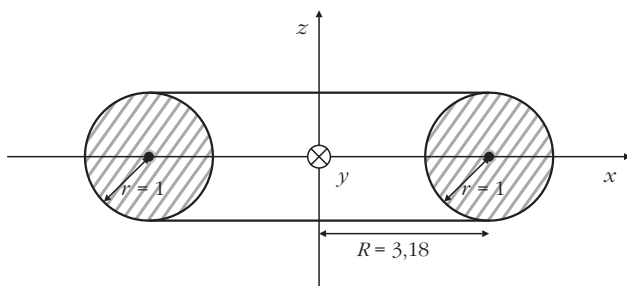
A toroid metszete a 6. ábrán látható. A nem-nulla komponenseket az alábbiakban összefoglaljuk azzal a kiegészítéssel, hogy a nullával osztás megelőzése okán bevezetjük a  $\delta$  húzalvastagságot:

$$\frac{A_x(x, z)}{A_0} = \frac{R}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\sin\varphi \cos\alpha}{\sqrt{D} + \delta} d\varphi \right) d\alpha,$$

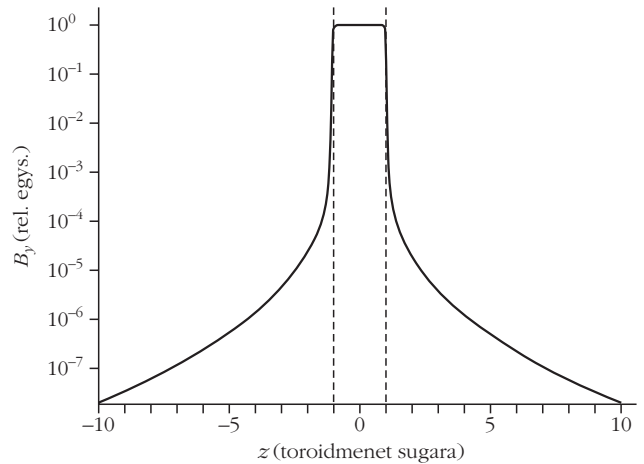
$$\frac{A_z(x, z)}{A_0} = \frac{R}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\varphi}{\sqrt{D} + \delta} d\varphi \right) d\alpha,$$

$$\begin{aligned} \frac{B_y(x, z)}{B_0} &= \\ &= \frac{rR}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x\cos\varphi - (R\cos\varphi + r - z\sin\varphi)\cos\alpha}{(\sqrt{D} + \delta)^3} d\varphi \right) d\alpha. \end{aligned}$$

6. ábra. A toroid metszete. Forgástengelye a  $z$  tengely, míg  $x$  és  $y$  a forgástengelyre merőleges síkot képez.



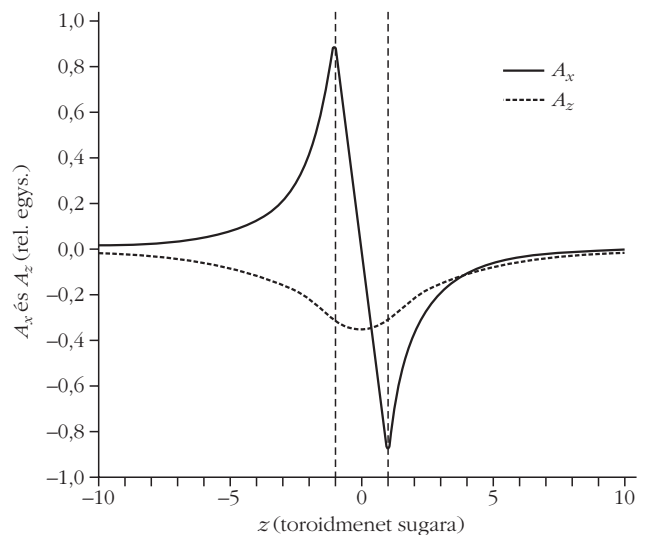
7. ábra.  $B_y$  komponens az  $x$  pozíció függvényében logaritmikus léptékben  $z = 0$  helyen.



8. ábra.  $B_y$  komponens a  $z$  pozíció függvényében logaritmikus léptékben  $x = 3,18$  helyen.

A numerikus számításoknál a következő paramétereket alkalmaztuk: a toroid meneteinek sugara az egység  $r = 1$ , a toroidalakzat rádiusza  $R = 3,18$ , (ez a  $R$  sugar éppen 20 kerületű tekercset eredményez, mint-

9. ábra.  $A_x$  és  $A_z$  komponensek  $z$  függvényében  $x = 3,18$  helyen.



ha az előző számítás szolenoidtekeresztet kör alakúvá hajlítottuk volna) továbbá a húzalvastagság  $\delta = 10^{-2}$ .

Vegyük észre, hogy a toroid belsejében a mágneses tér nem homogén (7. és 8. ábra). Kifelé haladva csökken, mivel a gerjesztési törvény szerint ugyanakkora gerjesztés jut egyre nagyobb kerületre. A tekercsen kívül a mágneses tér meredeken mintegy négy nagyságrendet csökken. A menetek középpontja  $x = 3,18$  pozíciónál van.

A tekercsen kívül a mágneses tér meredeken mintegy négy nagyságrendet csökken. A vektorpotenciálmező abszolút értéke viszont a tekercsen kívül össze mérhető a tekercsen belüli értékkel (9. ábra). Az indukált feszültség forrása tehát semmiképpen nem lehet a mágneses tér, csak a vektorpotenciálmező. Ennek időbeli változása okozza tehát az indukált elektromos erőteret, amelynek zárt görbére vett integrálja az indukált örvényfeszültséget adja.

## SZÍNES KAMÉLEONOK FÁZISÁTALAKULÁSA

Beke Tamás

Nagyasszonyunk Katolikus Általános Iskola  
és Gimnázium, Kalocsa

Néda Zoltán professzor úr az ELTE-n tartott egy előadás-sorozatot, amelyben különböző rendszerekben előforduló kollektív viselkedésekről esett szó. Az előadás végén javasolta, hogy találjunk ki olyan játékos feladatot, amelyben valamilyen kollektív viselkedés szerepel, és akár egy középiskolás diák figyelmét is fel lehet vele kelteni.

Sok egyedből álló rendszerekben olyan jelenségek is előfordulhatnak, amelyek nem direkt módon következnek a rendszert alkotó egyedek egyéni tulajdonságaiból. A jelenségeket összefoglaló néven kollektív viselkedésnek nevezzük. A fázisátalakulás, a szinkronizáció, a rajzás, a lavinák kialakulása vagy a térbeli mintázatképződés olyan kollektív jelenségek, amelyek nemtriviális módon jelennek meg az adott rendszerben. Ezek a jelenségek olyan rendszerekben fordulhatnak elő, amelyekben – általában – nagy számú egyed található, és az egyedek között létezik valamilyen kölcsönhatás [1].

A kollektív jelenségek közül ebben a cikkben a fázisátalakuláshoz kapcsolódóan mutatok be egy játékos szimulációs modellt. A fázisátalakulás során a rendszer fizikai tulajdonságai ugrásszerűen megváltoznak: bizonyos feltételek mellett a rendezetlen állapotból rend lesz vagy fordítva. Nézzünk néhány fázisátalakulást, amelyek során a rendezetlen állapotból rendezett állapot lesz!

- **Fagyás:** tiszta anyagok hűtése esetén folyadék halmazállapotból egy adott hőmérsékleten (a fagyásponton) szilárd halmazállapotú (kristályos) anyag keletkezik.

- **Szupravezetés:** néhány tiszta anyagnak, ötvözetnek, kerámiának hűtés közben egy adott kritikus (átmeneti) hőmérsékleten mérhetetlenül kicsivé válik az elektromos ellenállása. (Ez a kritikus hőmérséklet általában az abszolút zérusponthoz közelében van, bár például a magas hőmérsékletű szupravezető kerámiák kivételek.)

- **Ferromágneses rend kialakulása:** bizonyos tiszta paramágneses anyagok és néhány ötvözet is hűtés közben egy adott hőmérsékleten (a Curie-ponton) ferromágnessé válik.

Az előző példákban a rendezetlen állapotban lévő rendszerekben egy adott paraméter kritikus értékénél hirtelen rend alakult ki. Tudjuk jól, hogy a rendezetlenségből nehéz rendet teremteni. (Fordítva „megy magától” is, hiszen a termodinamika II. főtétele szerint a zárt, izolált rendszer entrópiája egyensúlyi állapotban maximális. Az entrópia a rendszer rendezetlenségének mértéke.)

A rendszer fázisátalakulását középiskolai tanulókkal is tanulmányozhatjuk. A bemutatásra kerülő modellben bizonyos paraméterértékeknél a rendezetlenségből „hirtelen” rend alakul ki. A fázisátalakulást modellező játékos szimulációs feladatban a tanulók fizikai ismeretei és modellalkotási képességei is gyakoroltak.

### Kaméleonos feladat

A fázisátalakulási jelenségek iskolai bemutatására találtam ki egy „játékos” programot. A számítógépes szimulációt a fizika és az informatika iránt érdeklődő gimnazista diákokkal közösen, projekt munkában fejlesztettük. A szimulációs feladatot FreePascal programozási nyelven írtuk meg, mert iskolánkban a gyerekek ezt a programnyelvet tanulják. (A projektben résztvevő tanulóknak én tanítom a fizika és az informatika tantárgyat is.)

A szimulációs feladat kaméleonokról szól, amelyek különleges módon viselkedhetnek. A játékos megfogalmazás ellenére a feladat tulajdonképpen fizikai folyamatot modellez. Több „kaméleonos feladatot” is megvalósítottunk; a bemutatásra kerülő modellben a kaméleonok „egyszerű módon” képesek szimulálni a rendszer fázisátalakulását.

Egy globálisan kölcsönható rendszerben minden egyed hatással van minden másik egyedre; egy lokális

---

Az írás az ELTE Fizika tanítása PhD-program keretében készült, témavezető Bene Gyula.