

Végezetül remélem, hogy e példa betekintést nyújt a mikro-ionnyalábos analitikai módszerek sokrétű felhasználásába, napjainkban szemléltetve azok szerepét.

#### Irodalom

1. I. UZONYI, GY. SZÖÖR, B. VEKEMANS, L. VINCZE, P. RÓZSA, GY. SZABÓ, A. SOMOGYI, F. ADAMS, Á.Z. KISS – Spectrochimica Acta Part B: Atomic Spectroscopy 59/10–11 (2004) 1717–1723
2. ZS. KERTÉSZ, Z. SZIKSZAI, E. GONTIER, P. MORETTO, J.-E. SURLÈVE-BAZELLE, B. KISS, I. JUHÁSZ, J. HUNYADI, Á.Z. KISS: Nuclear microprobe study of  $TiO_2$ -penetration in the epidermis of human skin xenografts – Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. B 231/1–4 (2005) 280–285
3. A. SIMON, G. KALINKA: Investigation of charge collection in a silicon PIN photodiode – Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. B 231 (2005) 507
4. I. UZONYI, R. BUGOI, A. SASIANU, Á.Z. KISS, B. CONSTANTINESCU, M. TORBÁGYI – Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. B 161–163 (2000) 748–752
5. ZS. KERTÉSZ, I. BORBÉLY-KISS, I. RAJTA, I. UZONYI, Á.Z. KISS – Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. B 161–163 (2000) 808–813
6. J. KOREK, P.A. PATAY: Bükki kultúra elterjedése Magyarországon (Die Verbreitung der Bükker Kultur in Ungarn) – Rég. Füz. Ser. II (1958) 2
7. G. BÁNDI: Adatok a mészbetétes edények népe É-dunántúli csoportjának történetéhez – A Janus Pannonius Múzeum Évkönyve, 1967.
8. M. WOSINSKY: Az őskor mészbetétes díszítésű agyagművészete – Budapest, 1904.
9. N. KALICZ, J. MAKKAY: Die Linenbandkeramik in der groben Ungarischen Tiefebene – Budapest, 1977.
10. I. REICHE, L. FAVRE-QUATTROPANI, C. VIGNAUD, H. BOCHERENS, L. CHARLET, M. MENU – Meas. Sci. Technol. 14 (2003) 1608

# MÁGNESES INGÁK KÍSÉRLETI TANULMÁNYOZÁSA

## Kaotikussá váló mechanikai síkmozgás egy példája

Bíró István

Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely  
Babeş–Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár

A kaotikus mozgás lehetőségét először *Henri Poincaré* fogalmazta meg, míg a sűrűdásos rendszerbeli kaotikus attraktorhoz kapcsolódó viselkedést először *Edward N. Lorenz* meteorológus írta le [1, 2]. Arra a kérdésre, hogy mi is a káosz, a következő választ adhatjuk: a káosz nem rendetlenség, hanem egy mozgástípus, egyszerű rendszerek bonyolult időbeli viselkedése [3]. Míg a szabályos mozgást a periodikusság vagy ismétlődő jelleg, előrejelezhetőség (hosszú távon) jellemzi, a kaotikus mozgásra a szabálytalanság, előrejelezhetetlenség jellemző [4].

Ennek kimutatására vizsgáltam lézerdíóda és fotópapír segítségével egy erősen nemlineáris rendszert, a mágneses kaotikus ingát. Kísérletileg megvizsgáltam az inga kváziperiodikus és kaotikus viselkedését is, majd eredményeimet számítógépes szimulációval ellenőriztem.

### A rendszer leírása

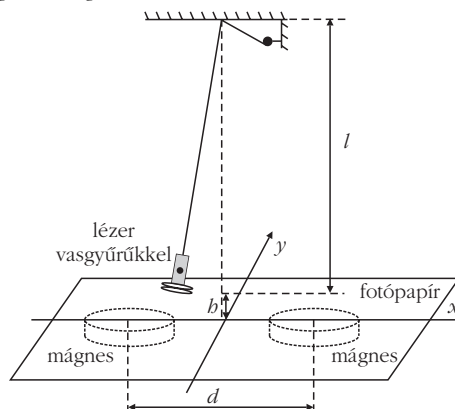
Közismert a matematikai ingát megközelítő fonálinga periodikus mozgása, amelynek periódusa csak a szál hosszától és a gravitációs gyorsulástól függ. Készítsünk most egy vastesttel rendelkező, hosszú szálú fonálingát, és tegyünk alá két mágneset úgy, hogy ezek közel legyenek a vasdarabhoz, de ne érhessenek hozzá [5], és középpontjaik egymástól  $d$  távolságra legyenek, valamint az inga nyugalmi helyzetben éppen a  $d$  távolság felénél legyen, a két mágnes között (1. ábra)!

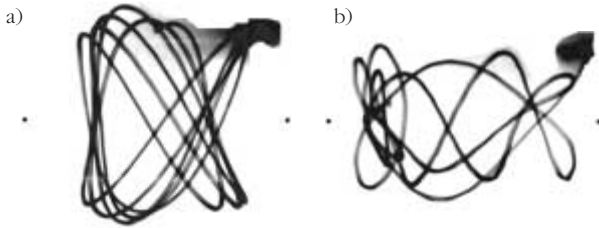
A mágnesek hatása miatt ingánk szabad lengései inkább el fognak térni a fonálinga mozgásától [6] minél közelebb van a két mágnes a vastesthez. Meglepő azonban az a tény, hogy ha a kis testet egy kritikus távolságnál közelebb helyezzük a mágnesek síkjához, azonos kezdeti feltételek ellenére a rezgések időbeli lefolyása

különböző, sőt a távolságot tovább csökkentve végül teljesen össze-vissza fog lengeni a test. Azonos kezdeti feltételek alatt természetesen csak közel azonosakat értünk, mivel egy indítás feltételeit sosem lehet teljesen pontosan megismételni a berendezés pontatlansága miatt. (A jelen esetben két azonosnak mondott, egymás utáni indítás koordinátáinak egymástól legfeljebb  $\pm 1$  mm-rel való eltérését jelentheti.) A jelenség magyarázata a következő. A mágnesek annál erősebben vonzzák a vastestet, minél közelebb találhatók hozzá. A fellépő vonzóerők a vas és mágnes közti távolságtól nemlineárisan függenek. Az ilyen rendszereket adott kezdeti állapottól indítva, azonos időintervallumok eltelte után, erősen eltérő végállapotokban találjuk, ugyanis a parányi kezdeti feltételkülönbségek a mozgás során hamar és nagymértékben elhatalmasodnak.

Megjegyzem, hogy míg a hárommágneses inga ismert, tanulmányozott modell [7], a kétmágneses ingát még nem

1. ábra. Mágneses kaotikus inga mérési elrendezése:  $l = 2$  m,  $d = 0,14$  m, a mágnesek sugara 2,5 cm.





2. ábra. Két jellegzetes pálya képe: a) az ingatest magasabban van a mágnesek felett,  $b = 2,1$  cm; b) az ingatest közel van a mágnesekhez  $b = 1,45$  cm.

tanulmányozták az általam ismert irodalomban, továbbá az alábbiakban leírt mérési módszer sem szerepel a szakirodalomban.

A fonal hosszát kísérleteim során változtattam, s ezzel az 1. ábrán  $b$ -val jelölt távolságot is: ez a nyugalomban levő inga és a fotópapír közti távolság. Minél kisebb  $b$  értéke (a lézer és a rajta levő vasgyűrűk közel vannak a laphoz és ezzel a mágnesekhez is), annál inkább erősödik a mágnesek hatása az ingára. Egy bizonyos  $b$  értéknél kisebb értékeknél az ingának két nyugalmi helyzete következik be(!): majdnem a két mágnes felett. ( $b$  nagyobb értékeire egy nyugalmi helyzet áll be: a mágnesek között). Kísérleteim során  $b$  sokkal kisebb, mint  $l$ , ezért  $l \approx 2$  m, a kitérések pedig ehhez képest igen kicsik. Ennek megfelelően mágnesek nélkül az inga lengéseinek frekvenciája  $(g/D)^{1/2}(2\pi)^{-1} \approx 0,35$  rezgés/s értékű.

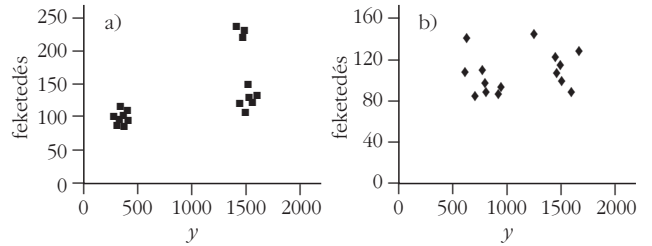
Az inga pályájának kirajzolásához a kísérletek alatt lesötétítettem a szobát, és fotópapírt helyeztem a mágnesek fölé. Az inga fonálára erősített testként pedig egy lézert használtam, melyre vasgyűrűket húztam. A lézert bekapcsolva és elengedve a már kitérített ingát, a lézersugár „rárajzolja” a fotópapírra az inga pályáját, a feketedés pedig a sebességről ad értékes információt. Az ingatest „elengedése” az azt tartó cérnaszál elégetésével történt, s így valamennyi mozgást kezdősebesség nélkül, közel azonos koordinátákról indíthattam.

Egy idő után, vagy a lengő lézer egyik mágnes fölött bekövetkező megállása után letakartam a fotópapírt, és előhívtam a képet. A 2.a és a 2.b ábrán két jellegzetes pályát láthatunk.

## Eredmények

Kváziperiodikusnak nevezzük az ingának azt a fajta mozgását, mely során az inga mozgásában, pályájában nem történnek hirtelen erős változások, azaz az inga mozgása során hasonló jellegű görbék felett mozog, melyek csak kicsit tolódnak el egymáshoz viszonyítva. Meg kell jegyezni, hogy a dolgozatomban kváziperiodikusnak nevezett mozgások a légellenállás miatt lényegében nem teljesen kváziperiodikusak. A kváziperiodikus elnevezés használatát ezekre a mozgásokra egyrészt az egyszerűsítő jellegükkel, másrészt pedig azzal indokolom, hogy a kváziperiodikusnak nevezett mozgások esetén viszonylag rövidnek tekintem a megfigyelés idejét, és ekkor a légellenállás hatása nem túl erős.

Kaotikusnak nevezzük az ingának azt a fajta mozgását, mely során az inga mozgásában (pályájában) hirtelen vál-



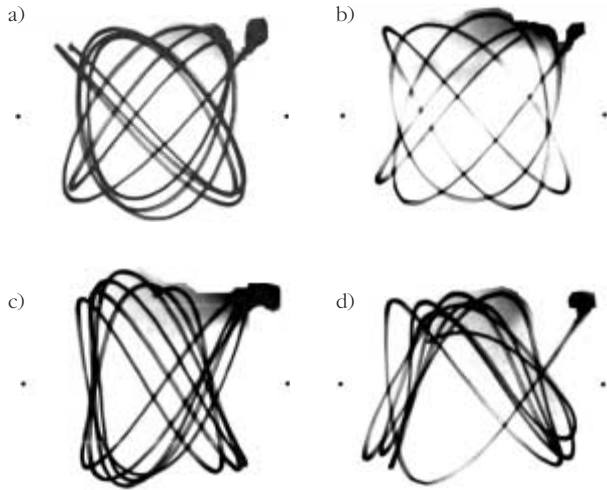
3. ábra. a) a 2.a ábrán látható kváziperiodikus mozgás pályája alapján készített Poincaré-diagram (a feketedésértékek az  $y$  koordináták szerint ábrázolva a visszatérési pontokban). b) a 2.b ábrán látható kaotikus pályagörbe alapján készített Poincaré-diagram.

tozások következnek be, és az egyes pályaszakaszok nem ismétlődnek. Az ilyen kaotikus mozgás végtelen sok ideig tart, ha nincs közegellenállási erő vagy valamely külső kényszer, amelyek az ingát megállásra vagy periodikus mozgás követésére készíti. A valóságban fellépő súrlódás miatt azonban tranziens (véges ideig tartó) káoszról beszélünk, azt a pontot pedig, amelyikhez a külső kényszer miatt az inga tart, egyszerű attraktornak nevezzük [3].

Az említett fényképeket szkennelre számítógépre vittem, és egy programmal egyes megjelölt kis pontok feketedését mértem. Ekkor a pályagörbe egyes pontjainak a lézer okozta feketedése egyenlő az illető pont és a háttér feketedését jellemző érték különbségével. Nyilvánvaló, hogy a lézer okozta feketedést jellemző érték fordítottan arányos az inga sebességének abszolút értékével az adott pontban. Az inga impulzusa pedig egyenesen arányos az inga sebességével. Ha az inga impulzusát ábrázoljuk a helykoordináta függvényében, fázistér-diagramot kapunk, ez pedig visszavezethető a feketedés  $(x, y)$  koordinátáinak függvényében való ábrázolására. Kaotikus viselkedésű rendszerek ábrázolására nem a legalkalmasabbak a hagyományos kitérés-idő és sebesség-idő grafikonok. Ezek helyett sokkal célszerűbb kitérés-sebesség grafikonnal dolgozni. Ezek a hely- és sebességváltozók definiálják a fázistér (egydimenziós esetben ez az  $(x, v)$  sík lenne).

Fázisdiagramunk azonban ebben az esetben négydimenziós lenne. Ezért a Poincaré-diagramot [3, 8] használjuk, amely a fázistér egyféle metszete, és amely alatt egy rendszer impulzusának ábrázolását értjük a koordinátái függvényében, egy meghatározott feltétel bekövetkezésékor. Nevezzük visszatérési pontnak azt a pontot, amelyhez húzott érintő párhuzamos az  $x$  tengellyel! Itt a sebesség  $y$  irányú komponense éppen nulla, tehát csak az  $x$  irányú sebességkomponens okozza a feketedést. Vizsgáljuk tehát és ábrázoljuk az inga pályájának visszatérési pontjaiban az inga impulzusát (amely a fentiek szerint fordítottan arányos a feketedés mértékével:  $p \sim 1/\text{feketedés}$ ) tetszőleges léptékű grafikonon az  $y$  koordináta függvényében! Ekkor Poincaré-diagramot kapunk. Az  $y$  koordinátához tartozó (programmal meghatározott) feketedésértékeket a 2.a ábrán ábrázoltam kváziperiodikus mozgás esetében. A megfelelő Poincaré-diagram a 3.a ábrán látható.

A 3.a ábrán levő grafikonon látható, hogy egyes pontcsoportok egy-egy pont körül sűrűsödnek. Ennek az a magyarázata, hogy kváziperiodikus mozgás esetén az inga pályája csak kis eltolódást szenved, tehát az egyes



4. ábra. Kváziperiodikus pályák fényképei. A mágnesek középpontját fekete pontokkal jelöltem (a mágnesek sugara 2,5 cm). Az inga indításának koordinátái:  $(x, y) = (5,5 \text{ cm}, 4 \text{ cm})$ . a)  $b = 2,55 \text{ cm}$ , b)  $b = 2,4 \text{ cm}$ , c)  $b = 2 \text{ cm}$ , d)  $b = 1,8 \text{ cm}$ .

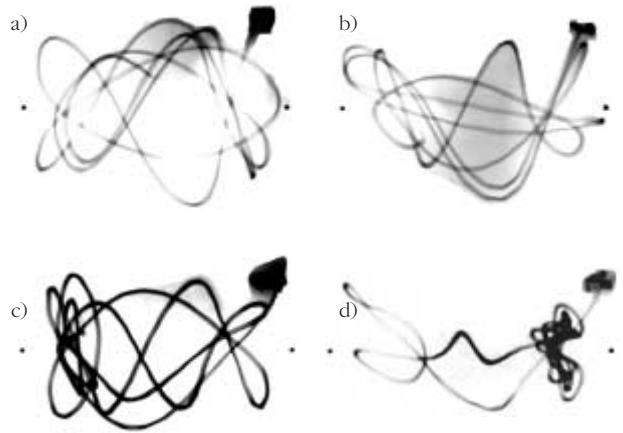
görberészek (egy keringésnek megfelelő görbék) csak kissé tolódnak el, gyakran egybe is esnek egy-egy szakaszon, és sebességeik sem különböznek erősen.

Ugyanígy megvizsgáltam a kaotikus mozgást mutató 2.b ábra pályáját. A megfelelő Poincaré-diagram a 3.b ábrán látható. A grafikon alsó részén levő pontcsoportok sokkal szétszórtabbak, mint a 3.a ábrán látható pontcsoportok. Ezek a mozgás előrejelezhetetlenségét, hirtelen, nem várt változást fejeznek ki.

## További pályák és a mozgás függése az inga–mágnes távolságtól

Most tekintsük és értelmezzük *A rendszer leírása* című részben leírt módon, a fotópapír segítségével készített képeket! A következő képeken megfigyelhetjük, milyen mozgást végez az inga a  $b$  magasság egyes értékei esetén. A mágnesek középpontját a fotópapíron egy-egy fekete ponttal jelöltem meg (ezeket, mivel a kísérlet teljes sötétségbe kell végezni, a kísérlet során a mágnesek középpontjába elhelyezett, picit kiálló tűkkel tudtam rögzíteni).

Megfigyelhető, hogy a 4. ábrán látható pályák (4.a–d) kváziperiodikusak. Ekkor az egyes pályaszakaszok nagyon hasonlítanak egymáshoz, csupán kissé eltolódnak egymáshoz képest. A 4.a és 4.b ábrán látható pályák  $b$  nagyobb értékeire is hasonlóak. Léteznek igen jellegzetes alakú pályák, melyek  $b$  jól meghatározott értékeire alakulnak ki. Ezekhez nagyon közel állnak a 4.c és 4.d ábrán látható pályák. Az egyes ábrákon látható pályák indításánál csupán a  $b$  magasságértékét változtattam.  $b$  csökkentésével a mozgás azonban hamarosan kezd nem reprodukálhatóvá, majd teljesen kaotikussá válik (5.a–d ábra). Az egyes pályaszakaszok már nem ismétlik egymást, az ingának pedig már két stabil fixpontja van a mágnesek fölött, és az origó instabillá vált. Ekkor a pályát követve gyakran nem várt változásokra, hirtelen áttörésekre találunk. Két közel azonos indítású pálya kezdetben hasonló, majd egyre in-



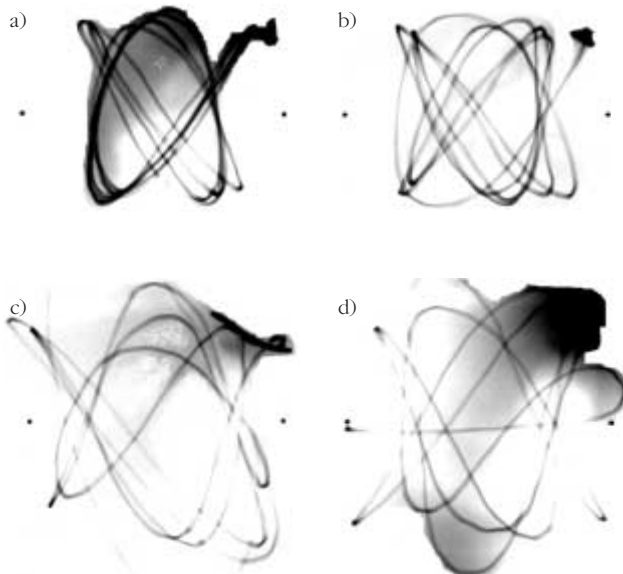
5. ábra. Kaotikus pályák, az indítás feltételei ugyanazok, mint a 4. ábra esetén, csupán a  $b$  magasság értékét változtattam: a)  $b = 1,7 \text{ cm}$ , b)  $b$  közelítőleg  $1,7 \text{ cm}$ , mint az a) esetben. Látszik, hogy a pályák eleje hasonló, majd hamar teljesen különbözővé válik. c)  $b = 1,45 \text{ cm}$ , d)  $b = 1,25 \text{ cm}$ .

kább különbözik egymástól (5.a és 5.b ábra). Ennek oka, hogy a mozgás kaotikus, és az indítási feltételek azonosságát nem lehet végtelen pontossággal beállítani. Márpedig a kaotikus mozgás pályái igen érzékenyek a kezdőfeltételekre.  $b = 1,25 \text{ cm}$ -nél kisebb magasságértékek esetén már annyira erős a mágnesek hatása, hogy elengedés vagy 1–2 lengés után az inga nem tud elmozdulni már az egyik mágnes fölül.

Az állandósult káosz megfigyelése érdekében gerjesztjük az ingát (6. ábra). A gerjesztést egy kis motor segítségével oldottam meg, amely egy kar segítségével periodikusan lengetett egy műanyaglapot a hosszára merőleges tengelye körül, azaz az  $y$  tengely körül (hasonlóan egy mérleghintához).

A gerjesztő mozgás frekvenciája nagyságrendben megegyezett a kváziperiodikus mozgás frekvenciájával ( $\approx 0,35$

6. ábra. Gerjesztett kváziperiodikus és kaotikus pályák. Az indítás feltételei ugyanazok, mint a 4. ábra esetén, csupán a  $b$  magasság értékét változtattam, és gerjesztettem a mozgást. A kezdőpillanatban a lap mindig vízszintes volt. a)  $b = 2,4 \text{ cm}$ , b)  $b = 2,1 \text{ cm}$ , c)  $b = 1,7 \text{ cm}$ , d)  $b$  közelítőleg  $1,7 \text{ cm}$ , a c) esethez hasonlóan. A kezdeti feltételek csupán a berendezés pontatlansága miatt különböztek kicsit a c) esettől.



regzés/s). Kaotikus mozgás esetén az inga igen különösen viselkedett. Egyes időpillanatokban igen erősen megnövekedett a lengési amplitúdója a gerjesztés miatt, máskor viszont nem mutatott amplitúdónövekedést. Ebben a folyamatban nem sikerült semmilyen törvényszerűséget, periodicitást találnom. Az állandósult káosz tehát ugyanolyan jellegű, mint a tranziens káosz, csupán végtelen hosszú ideig tart. Azt is megfigyelhetjük, például a 6.c és 6.d ábra esetében, hogy közel azonos indítású két pálya is igen hamar teljesen különbözővé válik.

## A mozgás jellege és a potenciál közti kapcsolat

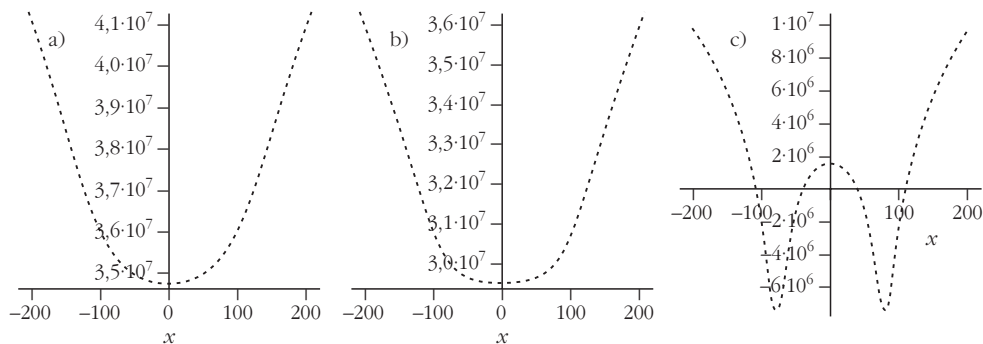
Az inga viselkedésének jobb megértése érdekében tanulmányozzuk az inga potenciális energiáját ( $V$ )! Tekintsük nulla szintnek a mágnesek síkját (merőlegesen a gravitációs térre) és a mágneses erőket  $k/r^2$  alakúaknak (ahol  $r$  az ingatest távolsága a mágnesről,  $k$  pedig a mágnes erősségét jellemzi<sup>1</sup>)! Feltételezzük, hogy az inga kitérései kicsik a szál hosszához képest és így az inga vízszintes síkban mozog. Az ingát tehát harmonikus oszcillátornak tekinthetjük ( $g/l$ )<sup>1/2</sup> frekvenciával. Ekkor az  $m$  tömegű test helyzeti energiáját a

$$V(x, y) = mg \frac{x^2 + y^2}{2l} + mgb - \frac{k}{\sqrt{\left(\frac{d}{2} + x\right)^2 + y^2 + b^2}} - \frac{k}{\sqrt{\left(\frac{d}{2} - x\right)^2 + y^2 + b^2}} \quad (1)$$

összefüggés adja meg, ahol  $g$  a nehézségi gyorsulás.

A 7. ábrán az ingatest potenciális energiáját ábrázolják. Ha  $b$  értéke nagy, a 7.a ábrán látható, jellegzetes görbe érvényes, amelyen egy potenciálvölgy található egy „domináns” minimumponttal: ez az origóban található. A mágnesek hatása itt igen kicsi, mivel az inga magassága a mágnesek síkjához képest nagy. E minimumpont

<sup>1</sup>  $k$  értékét előre kimért rugalmassági együtthatójú rugók segítségével mértem meg. Közelítve a mágneshez az ingát azonban igen erősen nőtt a vonzóerő (különböző rugók kellettek). Ennek ellenére sikerült  $k$  értékét legalább durva közelítéssel megbecsülnöm. Így  $k = 30 \text{ m}^3 \text{ g/s}^2$ . Abból a megfontolásból, hogy a valóságban a mágnes közel sem tekinthető pontszerűnek, mint elméleti megfontolásaimban, a szimulációk során  $k$  értékét egy nagyságrenddel nagyobbak tekintem:  $k = 300 \text{ m}^3 \text{ g/s}^2$ .



7. ábra. Az (1) összefüggés alapján, különböző paraméterértékekkel készített potenciálgörbék. A közös paraméterek:  $l = 2 \text{ m}$ ,  $m = 45 \text{ g}$ ,  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ,  $k = 3 \cdot 10^2 \text{ m}^3 \text{ g/s}^2$ ,  $d = 160 \text{ mm}$ . a)  $b = 90 \text{ mm}$ , b)  $b = 79 \text{ mm}$ , ez a bifurkáció pontja, c)  $b = 20 \text{ mm}$ .

$x$  tengely menti értéke az inga egyensúlyi helyzetét jelöli (ez az origóban, a mágnesek közt van).

Amennyiben csökkentjük  $b$  értékét, a 7.c ábrán látható bonyolultabb görbe lesz érvényes, melynek két potenciálvölgye van. Mindegyik egy-egy minimumponttal rendelkezik, és ennek megfelelően az ingának két egyensúlyi helyzete van. A nyugalmi helyzetek ( $x$  koordinátái) kissé eltérnek a mágnesek helyzetének megfelelő pontoktól, mivel mindkét mágnes hat a vasgyűrűkre (szuperpozícióról beszélünk). Az origó itt már instablnak mutatkozik. Megjegyzem, hogy az origó stabilitása jelentős mértékben függ a mágnesek középpontja közti  $d$  távolságtól is.

Lényegében az történik, hogy  $b$  kis értékeire a mágnesek fölött stabil fixpontok keletkeznek, a koordináta-rendszer origójában pedig egy instabil fixpont alakul ki. Az inga tehát instabil állapotok sorozatán megy át, és tranziens káoszt – azaz véges ideig tartó kaotikus mozgást – mutat a légellenállás miatt. A mágnesek tehát egyszerű attraktorok.

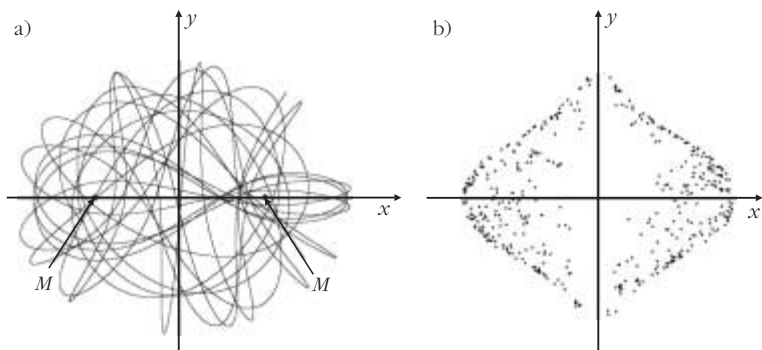
Az „áttérést” e két, különböző jellegű potenciál között bifurkációnak nevezzük,  $b$ -nak azt az értékét pedig, ahol ez az áttérés megvalósul, bifurkációs pontnak nevezzük (7.b ábra).

A kísérletek során  $b = 17 \text{ mm}$  értéknél a mágnesek hatása már kellően erős, és bármely  $b < 17 \text{ mm}$  esetén a mozgás kaotikus lesz. Amint ezt részletesebben a Numerikus szimuláció című részben tárgyalom, a szimulációk során erre az értékre  $b = 37 \text{ mm}$  adódott. Az eltérés főleg azzal indokolható, hogy az elméleti leírás esetén a mágneseket – a valóságtól eltérően – pontszerűnek tekintettem.

## Numerikus szimuláció

Hasonló eredményeket kaptam az általam írt mozgásszimuláló program futtatása során is. Ezek leírása előtt azonban tekintsük meg, hogyan is írható le pontosan a mágneses inga mozgása matematikailag.

Feltételezzük, hogy az inga kitérései kicsik a szál hosszához képest, és így az inga vízszintes síkban mozog. Az ingát tehát ( $g/l$ )<sup>1/2</sup> frekvenciájú harmonikus oszcillátornak tekinthetjük. Az (1) összefüggés alapján, deriválással kiszámolhatjuk az ingára ható erőt. Ennek  $x$  és  $y$  menti komponensei:



A mozgásegyenletek:

$$\ddot{x} = \frac{F_{x \text{ eredő}}}{m} \quad \text{és} \quad \ddot{y} = \frac{F_{y \text{ eredő}}}{m}. \quad (5)$$

8. ábra. a) súrlódásmentes kaotikus mozgás pályája. Paraméterek:  $b = 25 \text{ mm}$ ,  $k = 3 \cdot 10^2 \text{ m}^3 \text{ g/s}^2$ . b) súrlódásmentes kaotikus mozgás Poincaré-diagramja a 8.a ábra pályája alapján. A diagramon levő pontok erős szórást mutatnak.

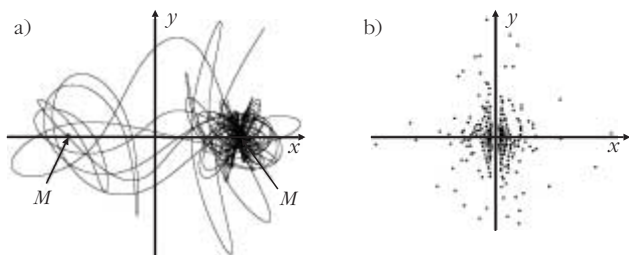
A (5) törvények alapján írtam meg a mágneses inga mozgását szimuláló és Poincaré-diagramot készítő programomat, a pontosság érdekében negyedrendű Runge–Kutta-módszert használtam.

Akárcsak méréseimnél, itt is megfigyelhető, hogy az átmenet kváziperiodikus mozgásból kaotikusba nem akkor következik be, amikor a mágnesek képesek a kis környezetükön belül levő, sebesség nélküli ingát maguk felett tartani, hanem akkor, mikor a koordináta-rendszer középpontja megfelelő mértékben instabillá válik. A szimulációk során a kváziperiodikus mozgást a kaotikus  $b = 37 \text{ mm}$ -nél váltja fel, ha eltekintek a légellenállástól. Megfigyelhető, hogy a szimulációim során figyelembe véve a légellenállást is, a mozgás  $b = 37 \text{ mm}$ -nél nagyobb értékre is kaotikussá válik.

Kaotikus mozgás esetén (a pályát a 8.a ábra mutatja) a Poincaré-diagramon, melyen az  $y$  koordináta függvényében ábrázoljuk a sebesség  $v_x$  komponensét – mikor a sebesség  $v_y$  komponense éppen 0 – látható, hogy egy adott koordinátához igen sok és eltérő sebességérték tartozik, a grafikonon levő pontok szórása nagy. A mozgás során az inga tehát hirtelen mozgásbeli változásokat szenved, és az origó itt már instabil fixpont (8.b ábra).

Súrlódásos kaotikus mozgás esetén a mozgás véges ideig kaotikus (tranzien káosz), a két mágnes pedig egy egyszerű attraktor (a pálya a 9. ábrán látható). A Poincaré-diagramon pedig látható, hogy a pontok szórása eleinte igen nagy, ami kaotikus jellegre utal, majd a sebesség 0 felé, a koordináták pedig az egyik egyszerű attraktor koordinátáihoz tartanak (9.b ábra).

A kaotikus mozgás egyik jellemzője, hogy igen érzékeny a kezdőfeltételekre. Így tapasztalható, hogy az ingát két, egymástól csak igen kicsit eltérő pontból indítva, annak mozgása különböző attraktorokhoz tart, tehát az inga különböző mágnesek felett áll meg. Ekkor igen érdekes lenne a teret feltérképezni, hogy a tér egyes pontjaiból indítva az ingát, az hol áll meg. Ezt kísérletileg sajnos nem tudtam megvalósítani a kísérlet idő- és fotópapír-szükséglete miatt. Ezért írtam egy programot, amely a tér egy, a mágnesek körüli részének közeli pontjaiból indított inga mozgását szimulálja, feltérképezve ezt a térbeli tartományt. A program minden egyes térbeli indítási ponthoz azt a szint rendelte hozzá, amelyet annak az attraktornak feleltettem meg, amelyik felé az inga mozgása tartott és amelynek hatásától a mágnes egy idő után már nem tudott kitörni (légellenállás miatt). Így kaptam a 10. ábrát, amelyen a középtájon látható legsötétebb tartomány a tér azon részét jelöli, ahonnan az ingát



9. ábra. a) súrlódásos kaotikus mozgás pályája. Paraméterek:  $b = 25 \text{ mm}$ ,  $k = 3 \cdot 10^2 \text{ m}^3 \text{ g/s}^2$ ,  $\alpha = 0,009 \text{ kg/m}$ ,  $\beta = 0,09 \text{ kg/s}$  esetben. b) súrlódásos kaotikus mozgás Poincaré-diagramja az a) ábra pályája alapján. A diagramon levő pontok erős szórást mutatnak.

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad \text{és} \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}. \quad (2)$$

Legyen a közegellenállási erő  $x$  és  $y$  tengely menti komponense  $F_{xe}$  és  $F_{ye}$ :

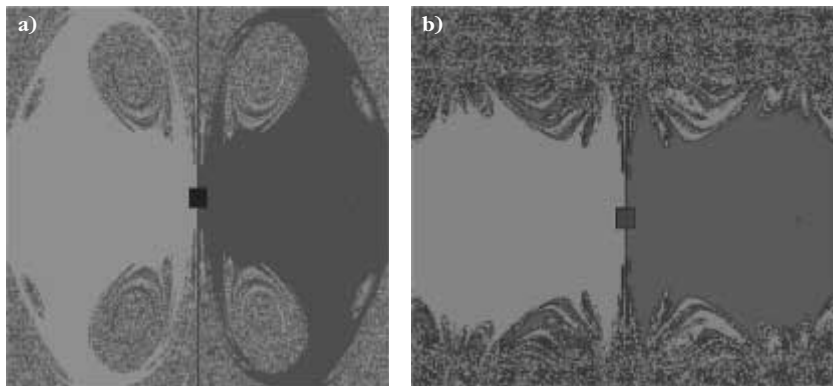
$$F_{xe} = -\alpha \sqrt{v_x^2 + v_y^2} v_x - \beta v_x, \quad (3)$$

$$F_{ye} = -\alpha \sqrt{v_x^2 + v_y^2} v_y - \beta v_y.$$

Itt az összegek első tagja a nyomási ellenállás, amely a test mögött keletkező örvényektől származik, míg a második tag a levegő belső súrlódásából származó súrlódási ellenállás [9]. Az eredő erők tehát:

$$F_{x \text{ eredő}} = F_x + F_{xe} \quad \text{és} \quad F_{y \text{ eredő}} = F_y + F_{ye}. \quad (4)$$

10. ábra. A vonzási tartományok. A szimuláció közös paraméterei:  $m = 45 \text{ g}$ ,  $l = 2 \text{ m}$ ,  $d = 160 \text{ mm}$ ,  $k = 300 \text{ m}^3 \text{ g/s}^2$ ,  $\alpha = 0,009 \text{ kg/m}$ ,  $\beta = 0,09 \text{ kg/s}$ ,  $dt = 0,0001$ . a)  $b = 40 \text{ mm}$ , b)  $b = 30 \text{ mm}$ .

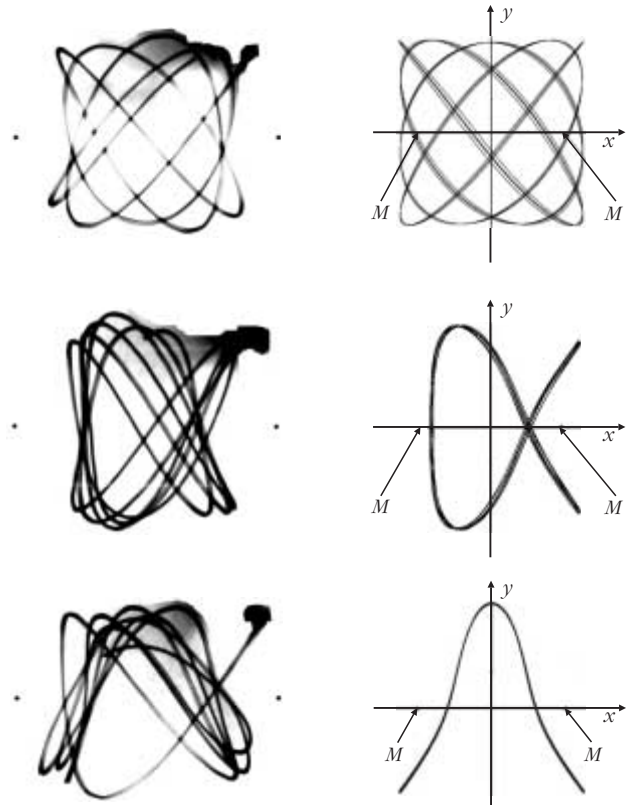


indítva az a mágneseket összekötő szakasz felezőpontjában áll meg. A világos pontok a tér azon részeit jelölik, ahonnan az ingát indítva az a baloldali mágnes fölött áll meg, végül a sötétebb pontok azt jelzik, hogy az onnan indított inga a jobboldali mágnes felett áll meg.

Megfigyelhető a 10. ábrán, hogy a fent leírt módon készített képeken az egyes egyszerű attraktorokhoz tartozó tartományok a mágnesektől távolabbi térrészben erősen egymásba vágnak. Ezeket a határvonalakat fraktálvonzási határoknak nevezzük [3, 7, 10]. Ebből is láthatjuk, mennyire érzékeny a rendszer az indítás kezdőfeltételeire. A 10. ábrán mutatott kép ugyanis a  $b$  magasság olyan értékére készült, amelynél az inga mozgása kaotikus. Nyilván mágnesek nélkül vagy  $b$  igen nagy értékeire a teljes tér egy árnyalatú (ez esetben sötét) lenne.

Megjegyzem, hogy a különböző árnyalatú tartományok széléről indított mozgások hosszabb ideig tartó kaotikus mozgások. Többször megfigyeltem, hogy ez esetben az inga hosszabban mozog egyik mágnes felett, majd kitör ennek környezetéből és a másik mágnes felett áll meg. Érdekes, hogy a leghosszabb mozgási idővel azok a pályák rendelkeznek, melyeket az  $y$  tengely mentén indítottam ( $x = 0$ ).

Vizsgáljuk meg, miként egyeznek a szimuláció eredményei a mérési eredményekkel! A 11. ábrán a mérésekkel kapott pályák mellett a szimulációval készült pályák láthatóak. Az egyes pályák jellegben igen jól hasonlíthatnak.



11. ábra. Néhány igen jól egyező, fotópapíron rögzített, illetve szimuláció során kapott kváziperiodikus pályagörbe.

## Összefoglalás

A mágneses kaotikus inga viselkedését jó minőségben megkaphatjuk a pálya lézeres kirajzolásával, majd ennek feketedését számítógéppel elemezve. A feketedés jellemzi ugyanis az inga adott helyhez tartozó sebességét és így az impulzusát. A mérések helyességét a numerikus szimulációval kapott, jellegben igen jól egyező eredmények is igazolják.

Kaotikus mozgás esetén – ha nincs légellenállás – az inga végtelen hosszú ideig kaotikus mozgást folytat, azaz permanens káoszról beszélünk, míg légellenállás jelenlétében csupán véges ideig kaotikus az inga mozgása, ez a tranzien káosz. A mozgás ebben az esetben egyik egyszerű attraktorhoz fog tartani (egyik mágneshez vagy igen ritkán az origóhoz).

Dolgozatom során sikerült belátni, hogy a kaotikus mozgás igen érzékeny a kezdőfeltételekre, és ennek megfelelően igen kis kezdőfeltétel-változtatás a mozgás végkimenetét teljesen megváltoztathatja.

Azt is megfigyelhettük, hogy kaotikus mozgás csak akkor alakul ki, ha az inga legalább kétdimenziós térben mozog. Csupán az  $x$  tengelyen történő mozgás sosem lesz kaotikus, hiszen egy szabadsági fokú rendszerekben nem jelentkezhet a káosz [3]. A mágneses inga vizsgálata tehát jól mutatja, hogy csupán a rendszer szabadsági fokai számának növelése is a káosz megjelenéséhez vezet, miközben minden más paraméter állandó marad.

A fentiekben a kaotikus mozgás jellegzetességeit tanulmányozhattuk egyszerű, könnyen megvalósítható esz-

közökkel, könnyen érthető módon. Ez alkalmas eszközzé teszi a mágneses ingát a kaotikus mozgás szemléltetésére akár a középiskolai fizikatanítás keretén belül is [11].

## Köszönetnyilvánítás

Köszönetemet fejezem ki elsősorban témavezetőimnek, akik segítségével nem lett volna lehetséges dolgozatom elkészítése: Tél Tamásnak, az ELTE TTK, Elméleti Fizika Tanszék tanárának és Máthé Márta tanárnőnek, a marosvásárhelyi Bolyai Farkas Elméleti Líceumból. Továbbá köszönöm Gruiz Márton jelentős segítségét programjaim megírásához, valamint Hantz Péter adjunktus (Babeş-Bolyai Tudományegyetem) és Péterfi István segítségét.

## Irodalom

- GÖTZ G.: *A pillangóeffektus – a káosz felfedezése a meteorológiában* – Fizikai Szemle 43/12 (1993) 487
- E.N. LORENZ: *Deterministic nonperiodic flow* – J. Atmos. Sci. 20 (1963) 130
- TÉL T., GRUIZ M.: *Kaotikus dinamika* – Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002
- K. BRIGGS: *Simple experiments in chaotic dynamics* – Am. J. Phys. 55 (1987) 1083
- <http://members.lycos.co.uk/ScienceAndScripture/wr/ls/chaospnd.html>
- J.P. BERDAHL, K.V. LUGT: *Magnetically driven chaotic pendulum* – Am. J. Phys. 69 (2001) 821
- H.O. PEITGEN, H. JÜRGENS, D. SAUPE: *Chaos and fractals* – Springer, Berlin, 1992, 12.8 fejezet
- K. LUCHNER, R. WORG: *Kaotikus rezgések* – Fizikai Szemle 36/6 (1986) 372
- D.B. MEADE, A.A. STRUTHERS.: *Differential equations in the new millennium: the parachute problem* – Tempus publications, 1999
- C. GREBOGI, E. OTT, J.A. YORKE: *Chaos, strange attractors, and fractal basin boundaries in nonlinear dynamics* – Science 238 (1987) 632
- GRUIZ M., TÉL T.: *A káosz* – Fizikai Szemle 55/5 (2005) 191