

BENEDEK GÁBOR–KÓBOR ÁDÁM–PATAKI ATTILA

A kapcsolatszorosság mérése *m*-dimenziós kopulákkal és
értékpapírportfólió-alkalmazások

A dolgozat a pénzügyi piaci faktorok közti függőség mérésének problémájával foglalkozik. A közelmúltban intenzív kutatások folytak e területen, amelynek eredményeként rugalmas nemlineáris modellek és alternatív függőségi mérőszámok váltak elérhetővé. A kopula fogalma kiemelt szerepet tölt be ezen új keletű kutatásokban. Segítségével kiléphetünk a normalitás hipotézisére épülő modellek világából, és a lineáris korreláció mellett lehetőségünk van alternatív kapcsolatszorossági mértékek használatára. Emellett tovább léphetünk az egy- és kétdimenziós elemzéseken is. Ebben a dolgozatban a statikus, időtényezőitől független esettel foglalkozunk, és két alkalmazást mutatunk be két különböző értékpapírpiacra, az amerikai és magyar piacra. A kopulák használatát kockázatkezelési problémákon keresztül illusztráljuk, és elvégezzük a modellek formális tesztelését.*

Definíciók, tételek

Jól ismert tény, hogy a normális eloszlás első- és másodrendű momentumai léteznek, és ezek az eloszlást egyértelműen meg is határozzák. Gyakorlati számításokhoz hasznosabb az eloszlást sűrűségfüggvényével megadni. Mint tudjuk, normális eloszlás esetén ez is létezik, ha a formaparaméter pozitív definit. Ebben az esetben Σ -át *kovarianciamátrix*nak hívjuk.

1. definíció. Az *m*-dimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvénye

$$K|\Sigma|^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)}, \quad (1)$$

ahol *K* alkalmas normalizáló konstans.

A megértéséhez megadjuk a többdimenziós normalitás egy újabb definícióját. Ehhez először bevezetjük a *kopula* fogalmát. Ismeretes, hogy ha *F*(.) egydimenziós eloszlásfüggvény, akkor az $y = F(x)$ transzformált változó eloszlása egyenletes a [0, 1] intervallumon. Erre alapozva definiálhatunk egy olyan többdimenziós eloszláscsaládot, amelynek peremei a [0, 1] intervallumon egyenletes eloszlások, így tetszőleges egydimenziós eloszlásokat kombinálhatunk egy általunk megválasztott függőségi struktúrával.

* Köszönettel tartozunk *Medvegyev Péternek* és *Simonovits Andrásnak*.

Benedek Gábor, Budapesti Közgazdaságtudományi és Államigazgatási Egyetem.

Kóbor Ádám, Magyar Nemzeti Bank.

Pataki Attila, Kereskedelmi és Hitelbank Rt.

2. definíció. *Kopulán az m -dimenziós, egyenletes eloszlású peremekkel rendelkező valószínűségi vektor eloszlásfüggvényét értjük. Más szavakkal: a kopula egy olyan $C: [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]$ leképzés, ami rendelkezik az alábbi három tulajdonsággal:*

1. $C(x_1, \dots, x_m)$ minden komponensében szigorúan monoton,
2. $C(1, \dots, x_j, \dots, 1) = x_j$ minden $j = 1, \dots, m$ -re, $x_j \in [0, 1]$,
3. *tetszőleges* $(a_1, \dots, a_m), (b_1, \dots, b_m) \in [0, 1]^m$ vektorokra, ahol $a_j \leq b_j$

$$\sum_{j_1=1}^2 \dots \sum_{j_m=1}^2 (-1)^{j_1+\dots+j_m} C(x_{1j_1}, \dots, x_{mj_m}) \geq 0$$

$$x_{k1} = a_k, x_{k2} = b_k, k = 1, \dots, m.$$

A kopula fontos szerepet játszik eloszlások konstruálásában. A kopula fogalma emellett alapvető a valószínűségi változók függőségének megértésében, illetve nem szimmetrikus eloszlásokra épülő modellek megalkotásában. A kopula fogalmára építve a normális eloszlást is újra definiálhatjuk, mint egydimenziós normális eloszlások kombinációját, ugyanis

1. tétel. Sklar tétele (Sklar [1996]): *legyen H egy m -dimenziós eloszlásfüggvény F_1, \dots, F_m peremekkel. Ekkor létezik m -dimenziós kopula, vagyis*

$$H(x_1, \dots, x_m) = C[F_1(x_1), \dots, F_m(x_m)].$$

Megfordítva, ha C egy m -dimenziós kopula, és F_1, \dots, F_m eloszlásfüggvények, akkor a fent megadott H egy m -dimenziós eloszlásfüggvény F_1, \dots, F_m peremekkel.

1. következmény. *Ha H folytonos m -dimenziós eloszlás F_1, \dots, F_m peremeloszlásokkal és $F_1^{-1}, \dots, F_m^{-1}$ kvantilisfüggvényekkel, akkor a*

$$C(u_1, \dots, u_m) = H[F_1^{-1}(u_1), \dots, F_m^{-1}(u_m)]$$

kopula egyértelmű.

Ha H nem folytonos, akkor körültekintően kell eljárni a tétel alkalmazásakor. A tétel alapján megadhatjuk a *Gauss-féle* kopula definícióját, amely egydimenziós normális eloszlású peremekkel többdimenziós normális eloszlást eredményez.

3. definíció. *A Gauss-féle vagy normális kopulán a*

$$C(\mathbf{x}) \equiv \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(x_1)} \dots \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(x_m)} K|\Sigma|^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)} dx_m \dots dx_1$$

függvényt értjük, ahol $\Phi(\cdot)$ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye.

A kopula lényege tehát abban áll, hogy az eloszlást felbontjuk peremeloszlásokra, illetve az ezeket kombinálól kovarianciastruktúrára. Ha normális eloszlású peremekre nem-gaussi kopulát teszünk, akkor olyan eloszlásokat tudunk konstruálni, amelyek nem normálisak normális eloszlású peremekkel.

Az elmélet általánosabb abban az értelemben is, hogy a kapcsolat szorossága nemcsak a kovarianciával (illetve a később definiálandó lineáris korrelációval) adható meg, hanem ettől általánosabb fogalmakkal is.

4. definíció. *Legyen $\mathbf{x} = [x_1, x_2]$ egy m -dimenziós valószínűségi vektorváltozó. Ekkor x_1 -nek az x_2 -re vonatkozó feltételes várható értékét, vagyis az*

$$f(\mathbf{x}_2) \equiv E(\mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_2)$$

függvényt elsőfajú regresszióknak nevezzük.

A normális eloszlás nevezetes tulajdonsága, hogy ez a függvény lineáris.

2. tétel. (Anderson [1958].) Az elsőfajú regresszió normális eloszlás esetén lineáris, vagyis ha $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] \sim N(\mu, \Sigma)$, akkor

$$\mathbf{x}_1 \sim N(\mu_1, \Sigma_{11}), \quad \text{valamint} \quad \mathbf{x}_2 \sim N(\mu_2, \Sigma_{22})$$

\mathbf{x}_1 -nek \mathbf{x}_2 -re vonatkozó feltételes eloszlása pedig szintén normális

$$\mu_{1|2} = \mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2 - \mu_2)$$

$$\Sigma_{1|2} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$$

paraméterekkel.

A normalitás az általa implikált linearitás és az ebből fakadó egyszerű kezelhetőség miatt a regressziós elemzések kedvelt alapfeltevése. E kapcsolat szorosságának leírására definiáljuk a *lineáris korrelációs együtthatót*.

5. definíció. Az x_j és x_k valószínűségi változó lineáris korrelációs együtthatója az alábbi formájú:

$$\rho(x_j, x_k) \equiv \frac{\text{cov}(x_j, x_k)}{\sqrt{\text{var}(x_j)\text{var}(x_k)}}.$$

Létezik a normális eloszlásnál általánosabb eloszláscsalád is, amely a normális eloszlás bizonyos kedvező tulajdonságaival rendelkezik. Ezek az úgynevezett *körkörös és elliptikus eloszlások*. Vannak esetek ugyanis, amikor a normális eloszlásnak csak bizonyos tulajdonságaira (szimmetria, linearitás) építünk, illetve más okból úgy adódik, hogy nem megfelelő a normális eloszlású modell hipotézise.

6. definíció. Az \mathbf{x} valószínűségi vektorváltozó eloszlása akkor *körkörös (spherical)*, ha tetszőleges \mathbf{U} ortogonális transzformációra $\mathbf{U}\mathbf{x}$ eloszlása azonos x eloszlásával, formálisan

$$\mathbf{x} =_d \mathbf{U}\mathbf{x}.$$

Az ilyen típusú eloszlások karakterisztikus függvénye igen egyszerű, mivel

3. tétel. (Fang és szerzőtársai [1990].) Egy m -dimenziós \mathbf{x} valószínűségi vektor eloszlása pontosan akkor *körkörös*, ha $\psi(\mathbf{t})$ karakterisztikus függvénye teljesíti az alábbi két – egymással ekvivalens – feltételek egyikét:

1. $\psi(\mathbf{t}) = \psi(\mathbf{U}\mathbf{t})$, ahol \mathbf{U} ortogonális,

2. létezik egy olyan $\varphi(\cdot)$ egyváltozós függvény, hogy $\psi(\mathbf{t}) = \varphi(\mathbf{t}'\mathbf{t})$.

Ha \mathbf{x} karakterisztikus függvénye $\varphi(\mathbf{t}'\mathbf{t})$ alakú, akkor ezt a továbbiakban így jelöljük: $\mathbf{x} \sim S_m(\varphi)$, φ -t pedig a körkörös eloszlás *karakterisztikus generátorfüggvényének* nevezük.

A körkörös eloszlásoknál általánosabb eloszláscsaládot alkotnak az *elliptikus eloszlások*, amelyek az $N(\mu, \Sigma)$ eloszlás általánosításai.

7. definíció. Az \mathbf{x} valószínűségi vektorváltozó eloszlása akkor *elliptikus (elliptically contoured)* μ és Σ paraméterekkel, ha

$$\mathbf{x} =_d \mu + \mathbf{A}'\mathbf{y} \quad \mathbf{y} \sim S_k(\phi),$$

ahol $\mu: m \times 1$, $\Sigma: m \times m$, $\mathbf{A}: k \times m$, $\mathbf{A}'\mathbf{A} = \Sigma$, valamint Σ rangja k .

4. tétel. Az elliptikus eloszlás peremeloszlásai is elliptikus eloszlásúak. Értelemszerűen $N(\mu, \Sigma)$ maga elliptikus.

1. állítás. Az m -dimenziós normális eloszlás elliptikus.

Bizonyítás. Az \mathbf{x} valószínűségi vektorváltozó eloszlása akkor $N_m(\mu, \Sigma)$, $\Sigma = \mathbf{A}'\mathbf{A}$, ha felírható az

$$\mathbf{x} =_d \mu + \mathbf{A}'\mathbf{y} \quad \mathbf{y} \sim N_k(\mathbf{O}, \mathbf{I}_k),$$

alakban. Ekkor $\mathbf{y} \sim S_k(\phi)$, ahol is $\phi = e^{-\frac{u}{2}}$.

1. megjegyzés. Ha $k = m$, akkor létezik a sűrűségfüggvény is. A $k < m$ esetben degenerált eloszlást kapunk, amely a tér egy k -dimenziós altere felett koncentrálódik.

A Σ jelentése továbbra is ugyanaz marad, a lineáris függőség mértékét, illetve az eloszlás formáját határozza meg. Azt is szokás mondani, hogy kovariancia kompatibilis az elliptikus eloszlásokkal. Az elliptikus eloszlások családjában a második legfontosabb eloszlás a Pearson VII. típusú eloszlás, másnéven a Student t -eloszlás.

8. definíció. Az \mathbf{x} valószínűségi vektorváltozó eloszlása akkor követ m -változós v szabadságfokú (centrális) Student t -eloszlást, ha

$$\mathbf{x} =_d v^{1/2} \mathbf{y} / s \quad \mathbf{y} \sim N_m(\mathbf{O}, \mathbf{I}_m), s \sim \chi_v.$$

Jelölése: $\mathbf{x} \sim Mt_m(v, \mathbf{O}, \mathbf{I}_m)$.

2. megjegyzés. $v = 1$ esetet Cauchy-eloszlásnak hívjuk.

2. állítás. A centrális Student t -eloszlás körkörös.

9. definíció. Az \mathbf{x} valószínűségi vektorváltozó akkor követ m -dimenziós, v szabadságfokú, μ és Σ ($\Sigma = \mathbf{A}'\mathbf{A}$) paraméterű (nem centrális) Student t -eloszlást, ha

$$\mathbf{x} =_d \mu + \mathbf{A}'\mathbf{y} \quad \mathbf{y} \sim Mt_m(v, \mathbf{O}, \mathbf{I}_m).$$

Jelölése: $\mathbf{x} \sim Mt_m(v, \mu, \Sigma)$.

3. állítás. Az m -dimenziós μ és Σ paraméterű (nem centrális) Student t -eloszlás elliptikus.

3. megjegyzés. Míg a normális eloszlást a μ és Σ paraméterek egyértelműen meghatározták, addig a t -eloszlás egy (v, μ, Σ) paraméterhármassal adható meg egyértelműen. Az elliptikus eloszlások kompatibilisek a kovariancia (illetve korreláció) fogalmával, de az eloszlás meghatározásához a normális eloszlást kivéve nem elégségesek.

A többdimenziós t -eloszlás fontos szerepet játszik különösen pénzügyi alkalmazásokban, illetve olyan alkalmazásokban, melyeknél gyakoriak a kiugró elemek, illetve extrém események. Függőségi struktúrája összetettebb, mint a normális eloszlásé, ezért rugalmasabban alkalmazható. Emellett speciális esetként ($v = \infty$) tartalmazza a normális eloszlást is, és sok tulajdonságában hasonlít is rá.

Habár későbbi elemzéseinkhez nem kapcsolható, mégis szót kell még ejtenünk az úgynevezett α -szimmetrikus eloszlásokról. A körkörös eloszlások egy másik irányban történő általánosításáról van szó. Ide tartozik a normális eloszlás, a Cauchy-eloszlás, valamint a Lévy-eloszlás, amelynek a pénzügytanban van gyakorlati jelentősége.

10. definíció. Az m -dimenziós α -szimmetrikus eloszlás karakterisztikus függvénye

$$\psi(\mathbf{t}) = e^{-c \sum_{j=1}^m |t_j|^\alpha} \quad 0 < \alpha \leq 2, c > 0$$

$c = 1/2$, $\alpha = 2$ esetén a normális eloszlást kapjuk, így tehát

4. állítás. Az m -dimenziós standard normális eloszlás α -szimmetrikus.

$m = 1$, $0 < \alpha < 1$ esetet a gyakorlatban Lévy-eloszlásként emlegetik. $m > 1$ esetén $0 < \alpha \leq 2$ sajnos még elég keveset tudunk az eloszlások létezéséről. Az $\alpha = 1$, vagyis 1-szimmetrikus eloszláscsaládot vizsgálták eddig behatóbban. Megemlítjük, hogy a Cauchy-eloszlás is idetartozik. Ha létezik is az eloszlás, sűrűségfüggvény zárt alakban csak spe-

ciális ($\alpha = 1$, illetve $\alpha = 2$) esetben létezik, ezért az alkalmazók eléggé kerülnek ezt az eloszláscsaládot. A témáról lásd *Fang és szerzőtársai* [1990].

A kovariancia és a (lineáris) korreláció az elliptikus eloszlásokkal konzisztens fogalmak. A definícióban megadott formaparaméter (Σ) jelentése azonos, a lineáris páronkénti függőséget méri. A legfőbb probléma vele viszont az, hogy a mintából számított tapasztalati korrelációs együtthatóval nem mindig becsülhető, mivel utóbbi az eloszlás momentumaira épül. Így ha nem létezik az eloszlás első és/vagy második momentuma, illetve az végtelen, akkor ez a kapcsolat szorosságát mérő szám nem számítható (ugyanis a nevező végtelen). Egy másik gyakorlati probléma a minta kovarianciaérzékenysége a kiugró elemekre. Így a nem normális eloszlású adatok elemzésekor a becsült lineáris korreláció meglehetősen instabil is lehet, ezért célszerű egyéb, robusztusabb becsléseit használni.¹

Fontos szerepe van még egy, a kopula fogalmához kapcsolódó, aszimptotikus kapcsolatszorosság mérőszámoknak.

11. definíció. *Legyen x_j és x_k valószínűségi változók F_j és F_k folytonos eloszlásfüggvénnyel. Az x_j és x_k felső farkokban vagy felső szélekben való függőségén (tail dependence) a*

$$\lambda_u = \lim_{u \rightarrow 1} P[x_k > F_k(u) \mid x_j > F_j(u)]$$

együtthatót értjük. Az alsó farkokban való függőség értelemszerűen következik.

Az aszimptotikus függőség a (lineáris) korrelációs együtthatóhoz hasonlóan páronkénti függőséget mér. Mint megismertük az előzőkben, az elliptikus eloszlások között csak a normális eloszlást határozza meg egyértelműen a kovariancia, illetve korrelációs mátrix. Más elliptikus eloszlások függőségi struktúrája azonban összetettebb. A t -kopula esetén például a szabadságfok csökkenésével növekszik az aszimptotikus függőség (*Embrechts és szerzőtársai* [1999]). Ez nagyon hasznos lehet, ha például extrém eseményeket szeretnénk modellezni. Jó példa erre a tőzsdei értékpapírok hozama. Ha valami rendkívüli esemény rázza meg ugyanis a piacot, akkor ez rendszerint több értékpapírt is érint. Az extrém események hatására ezért több, egyébként esetleg gyengén korrelált papír elkezd együtt mozogni. A következő fejezetben bemutatott alkalmazás során pedig találkozni fogunk olyan kopulákkal, amelyek ezen felül még rendelkeznek úgynevezett *globális függőségi* paraméterrel, vagyis a páronkénti függőség és az aszimptotikus függőség mellett az m változó együttmozgását is tudjuk jellemezni. A témáról jó áttekintés található az *Artzner és szerzőtársai* [1999], valamint *Embrechts és szerzőtársai* [1999] cikkeken.

4. megjegyzés. *Bizonyítás nélkül megjegyezzük azt nem meglepő tényt, hogy a gaussi kopula (illetve a többdimenziós normális eloszlás) aszimptotikusan független. Ez elég logikus, hiszen a lineáris korreláció teljes mértékben jellemzi ennek a kopulának a függőségi struktúráját.*

A kockázatotott érték számítása

A modern piaci kockázatomérés legnépszerűbb elemzési rendszerét a *kockázatotott érték* – Value at Risk; *VaR* – számításához kapcsolódó módszerek jelentik. Ez tipikusan egy olyan alkalmazási terület, ahol az alapeloszlásra – esetünkben a piaci hozamok eloszlására – vonatkozó normalitás hipotézise legkevésbé állja meg a helyét. Az alapadatok komponensenkénti, egydimenziós idősoraira többnyire a csúcosság, illetve a hosszan elnyúló, vastag szélek a jellemzőek.

¹ *Lindskog* [2000] cikkében kimerítő empirikus elemzést ad a lineáris korreláció alternatív becslési lehetőségeiről és ezek viselkedéséről különböző (elliptikus és nem elliptikus) eloszlások esetén.

A piaci hozamok idősorát lehet statikus, illetve dinamikus modellel leírni. A statikus esetben feltételezzük, hogy az adatok varianciája minden időpontban azonos, míg a dinamikus esetben a variancia valamilyen sztochasztikus folyamat (például ARCH, GARCH) szerint változik. Mi most a statikus esettel foglalkozunk.

A portfólió diverzifikációja a kockázatkezelésben kiemelkedő fontosságú, erre Markovitz tanulmánya hívta fel a figyelmet (*Markovitz [1959]*). A diverzifikáció úgy működik, hogy ha a portfóliót több kockázati faktor között allokaljuk, akkor habár egyes faktorok kedvezőtlen elmozdulása miatt veszíthetünk, más faktorok gyenge vagy negatív korreláltságuk miatt kompenzálják az előbbi veszteséget. Az, hogy meghatározott valószínűségi szinten a normalitás körülményeihez képest jóval nagyobb veszteség keletkezhet, mára már szervesen beépült a kockázatkezelők tudatába. Azt is világosan kell látni azonban, hogy a tőkepiaci válságok esetén, ami egy egész szektort vagy földrajzi régiót érint, az egyes faktorok együttesen produkálhatnak hatalmas veszteséget. Más szóval: portfóliók esetén a leg súlyosabb problémát nem az okozza, hogy egy faktor extrém viselkedést produkál, hanem az, hogy az extrémítást együttesen, egyszerre képesek mutatni, és ekkor a diverzifikáció már nem jelent akkora védelmet, mint azt normális piaci körülmények közt várnánk. Persze nem kell feltétlenül ritkán bekövetkező krachokra gondolni. A mindennapok során az együttesen bekövetkező veszteségek gyakorisága jóval nagyobb, mint azt az elliptikus kontúrok alapján gondolhatnánk.

Ahhoz, hogy a részvényhozamok együttmozgását jobban megértsük, és a kockázatot minél valószínűbben meg tudjuk ragadni, már nem elégséges a lineáris korreláció fogalma. Ennek legfőbb oka az, hogy a lineáris korreláció csak akkor alkalmazható, ha az alapeloszlás elliptikus. Ezen belül pedig csak a többdimenziós együttes normális eloszlás esetében elégséges a kapcsolatszorosság mérésére, hiszen csak ebben az esetben írja le teljeskörűen az eloszlás függőségi viszonyait (lásd a 3. megjegyzést).

Ha az alapeloszlás nem teljesíti az együttes normalitás követelményét, akkor alternatív függőségi mérőszámokra van szükség. Ilyen lehet például az *aszimptotikus függőség (11. definíció)*, amely a tőzsdei extrém események mérésére alkalmasnak látszik. Lehetséges ugyanis, hogy a napi mozgásokat tekintve, az egyes papírok között közepes vagy gyenge korrelációt mérünk, mégis, ha valami rendkívüli esemény történik, ezek a papírok egyszerre kezdenek zuhanni vagy emelkedni. Vagyis extrém esemény (*tail event*) bekövetkezése az egyik változóban együtt jár egy másik változó értékében bekövetkező extrémítással. Ebből a szempontból a normális eloszlás elég kedvezőtlen modellválasztás lenne, hiszen tudjuk a 4. megjegyzés alapján, hogy az eloszlás aszimptotikusan független. Ugyanakkor a Student *t*-eloszlás például, különösen alacsony szabadságfokok esetén, aszimptotikusan összefüggő. Az 1. táblázatot az *Embrechts és szerzőtársai [1999]* cikkből vettük át.

1. táblázat
A *t*-eloszlás aszimptotikus függősége

A <i>v</i> értéke	A <i>r_{ij}</i> értéke				
	-0,5	0,0	0,5	0,9	1,0
2,0	0,06	0,18	0,39	0,72	1
4,0	0,01	0,08	0,25	0,63	1
10,0	0,00	0,01	0,08	0,46	1
∞	0	0	0	0	1

1. ábra

Gaussi és t_2 -eloszlásból generált minták normális eloszlású peremekkel
($r = 0,8$)



Az oszlopok két perem közti különböző korreláció mellett, a sorok pedig különböző szabadságfok (ν) paraméterek mellett mutatják az aszimptotikus függőség értékeit. Látható, hogy a korreláció növekedésével, illetve a szabadságfok csökkenésével nő az aszimptotikus függőség. Mivel $\nu \rightarrow \infty$ normális eloszlás, ezért a normális eloszlás aszimptotikusan független. Az 1. ábrán egy gaussi, illetve egy t_2 -eloszlásból vett generált mintát ábráztunk $r = 0,8$ korreláció mellett. A t_2 -eloszlásnál jól látható az együttes extrém események nagyobb gyakorisága, a pontfelhő elnyúltabb, több a kiugró érték.

További függőségi struktúrák leírására és függőségek mérésére ad lehetőséget a kopula fogalma (lásd a 2. definíciót). Ennek segítségével adott peremeloszlásokat tetszőleges függőségi struktúrával kapcsolhatjuk össze. Kettőnél több dimenziós esetben pedig speciális konstrukciókkal olyan kopulákat definiálhatunk, amelyek a páronkénti függőség mellett rendelkeznek úgynevezett globális függőségi paraméterrel.

Ebben a fejezetben olyan modelleket fogunk bemutatni, amelyek a normális eloszlásra épülő modellek lehetséges alternatívái. Az aszimptotikus függőség és a kopula fogalmának a segítségével fogunk modellt építeni, amelyet főleg a könnyű utótesztelhetősége miatt VaR-számításokkal illusztrálunk. Három részvényből álló portfóliókat vizsgálunk meg, és pedig

$$\Pi = \sum \pi_j z_j \quad j \in \{1, 2, 3\}$$

alakú egyszerű portfóliókat, ahol π_j a j indexű papír értéke, z_j pedig annak hozama. Jelölje F_Π a portfólió eloszlásfüggvényét, ekkor a VaR-érték kiszámítása a valószínűségi szinten formálisan

$$\text{VaR}_\alpha(\Pi) = -\inf\{v \in \mathbb{R} : F_\Pi(v) \geq 1 - \alpha\},$$

vagyis a portfólió jövőbeli értékeinek az adott valószínűségi szinthez tartozó percentilise. Ha az F_Π eloszlásfüggvény inverze nem ismert, akkor a VaR-értéket Monte-Carlo-szimuláció segítségével tudjuk becsülni. Esetünkben mondjuk r különböző lehetséges esemény esetén $\alpha = 0,95$ szinten a $0,05r$ -edik legrosszabb elem. A papírok értékét egységnyinek választjuk, vagyis $\pi_j = 1$ minden j -re.

Tegyük fel, hogy van a részvények hozamára vonatkozóan egy n méretű $Z_j^{(1)}, \dots, Z_j^{(n)}$, $j = 1, 2, 3$ mintánk, és erre szeretnénk modellt illeszteni. Ekkor két lehetőségünk van. Felírhatunk egydimenziós modellt a portfólió eloszlására, vagyis képezzük a $Z^{(1)}, \dots, Z^{(n)}$

egydimenziós mintát, ahol $Z^{(i)} = \sum_j Z_j^{(i)}$ és erre illesztjük F_{Π} -t, majd ennek becsüljük a

megadott küszöbértékét. A másik út az, ha egy többdimenziós G_3 eloszlást illesztünk a

hozamok többdimenziós mintájából, majd pedig a $\zeta = \sum_j \zeta_j$ változóra számítunk

percentiliseket, ahol $[\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3] \sim G_3$. Utóbbi bonyolultabb, de kifinomultabb megoldás, hiszen a portfólióban egymástól jelentősen eltérő kockázatosságú instrumentumok is lehetnek, amelyeket a portfóliómodell esetleg – az aggregáció miatt – összemoss. Mí mindkét megközelítést bemutatjuk.

A VaR, mint mondtuk, egy jövőbeli értékre vonatkozó becslés. Egy adott mintaidőszakra, amelyet *ablaknak* is szokás nevezni, megbecsüljük az eloszlást. Mivel feltettük, hogy a variancia állandó, ezért egy $t = 1, \dots, T$ idősort egy mintának tekintünk, és erre illesztjük a kiválasztott eloszlást. A VaR_α érték a becsült eloszlás $1 - \alpha$ percentilise, amelyet a $(T + 1)$ -edik napra vonatkoztatunk. A tárgynapra vonatkozó becslésünket tehát a tárgynapot megelőző T nap eseményeire alapozzuk. A becslés alapján hozott döntésünk bizonyos kockázatot is magában rejt. Egy $\alpha = 95$ százalékos VaR -érték ugyanis azt jelenti, hogy az esetek 5 százalékában tévedni fogunk. Azt, hogy modellünk helyes-e, vagyis hogy ténylegesen ekkora-e a hibaszázalék, úgy ellenőrizhetjük, hogy több becslést végzünk, és empirikusan megvizsgáljuk a hibaarányt. A $t = 1, \dots, T$ ablakot továbbcsúsztatjuk a $t = 2, \dots, (T + 1)$ időszakra, és megbecsüljük a $(T + 2)$ -edik tárgynapi VaR -értéket és így tovább. A kapott becslésekből aztán hibaarányt számolunk, és teszteljük (lásd később), hogy az empirikus hibaarány eltérése az elméleti értéktől szignifikáns-e (elfogadható-e), vagy sem.

Egydimenziós portfóliómodellek. Két modellt vizsgáltunk. Az elsőben a portfólió eloszlására normalitást feltételeztünk, míg a másodikban a portfóliót t -eloszlásának feltételeztük. Mivel a szabadságfok növekedésével a t -eloszlás a normális eloszláshoz tart, ezért elméletileg csak egy modelltől van szó. A gyakorlatban a $\nu = 50$ szabadsági fok felett a két eloszlás között nincs is különbség. Mivel a t -eloszlás a (μ, σ) paramétereiben folytonos, a ν paraméterben pedig diszkrét, ezért iteratív becslést használtunk. Adott $\nu \in [1, 2, \dots, 50]$ értékekre előállítottuk a (μ, σ) paraméteregyüttes likelihood becsléseit, majd azt választottuk ki, amelynél a likelihood becslés értéke a legnagyobb volt. Mivel ν -ben a likelihood értékek „konkávok”, ezért a becslést $\nu = 1$ -től kiindulva addig érdeemes folytatni, amíg a likelihood érték el nem kezd csökkenni. Normális eloszlást feltételezve, a paraméterek likelihood becslése az egyszerű mintaátlag és a korrigálatlan tapasztalati variancia. Erre a megközelítésre alapozva készült korábban egy önálló tanulmány, amely ugyancsak a Közgazdasági Szemlében jelent meg (Kóbor [2000]).

A becsült normális eloszlás megfelelő percentilis értékeit a normális eloszlás inverz eloszlásfüggvényéből (Wichura [1988]), a t -eloszlás percentiliseit pedig az inverz bétafüggvény segítségével számíthatjuk ki.

Kopulamodellek. Két modellesaládot vizsgáltunk. Az egyikben a függőségi struktúrát t -kopulával írjuk le, a másikban úgynevezett MMx kopulákat illesztünk, amelyeket rövidesen ismertetünk. Peremeknek azonban mindkét esetben t -eloszlást választottunk. A gyakorlatban ugyanis a hozamok eloszlását vagy t -eloszlásának, vagy α -szimmetrikus eloszlásának (lásd 10. definíció) feltételezik.

5. megjegyzés. *Ha úgy tetszik, két rivális modelltől van szó. Az α -szimmetrikus (vagy stabil) eloszlás használata elméletileg jobban indokolható, a t -eloszlás viszont igen jól*

illeszkedik a hozamok idősoraira. Az érdeklődő olvasónak ajánljuk a Palágyi [2001] dolgozatot.

A kopulamodellek becslésének menete a következő:

1. Megbecsüljük a $t_j(z_j; \mu_j, \sigma_j, \nu_j)$ peremeloszlásokat az előzőekben leírt módon, majd kiszámítjuk a $U_j^{(i)} = t_j(Z_j^{(i)}; \hat{\mu}_j, \hat{\sigma}_j, \hat{\nu}_j)$ $j = 1, 2, 3$ és $i = 1, \dots, n$ valószínűségeket.

2. Az így kapott $U_j^{(1)}, \dots, U_j^{(n)}$ $j = 1, 2, 3$ többdimenziós mintára illesztjük a $C_3(\mathbf{u}; \theta)$ kopulát, szintén likelihood módszerrel.

3. A becsült eloszlás tehát a

$$G_3 \equiv C_3\left(t_1(z_1; \hat{\mu}_1, \hat{\sigma}_1, \hat{\nu}_1), t_2(z_2; \hat{\mu}_2, \hat{\sigma}_2, \hat{\nu}_2), t_3(z_3; \hat{\mu}_3, \hat{\sigma}_3, \hat{\nu}_3); \hat{\theta}\right)$$

alakot ölti, melyből aztán Monte-Carlo-szimulációval r független véletlen vektort generálunk. Legyen ez a $\zeta_j^{(1)}, \dots, \zeta_j^{(r)}$, $j = 1, 2, 3$ halmaz.

4. Képezzük a $\zeta^{(i)} = \sum_j \zeta_j^{(i)}$ statisztikákat, és rendezzük őket, vagyis legyen legyen $\zeta^{(1)} \leq \dots \leq \zeta^{(r)}$, A $\text{VaR}\alpha$ -érték az $r(1 - \alpha)$ -dik legkisebb elem lesz.

6. megjegyzés. A kopula egy eloszlásfüggvény, tehát a paramétereit a szokásos módszerekkel becsüljük. Ha a likelihood becslést választjuk, akkor persze szükség van a sűrűségfüggvényre is.

A t -kopula a t -eloszlás eloszlásfüggvényéből az előző fejezet 1. következménye alapján származtatható. Ha tehát $H_T(\cdot)$ folytonos, m -dimenziós t -eloszlás $t_1(\cdot), \dots, t_m(\cdot)$ peremeloszlásokkal és $t_1^{-1}(\cdot), \dots, t_m^{-1}(\cdot)$ inverz eloszlásfüggvényekkel, akkor a

$$C_T(u_1, \dots, u_m) = H_T(t_1^{-1}(u_1), \dots, t_m^{-1}(u_m))$$

eloszlásfüggvény a t -kopula, amely egyértelmű. Ugyanez igaz bármely más folytonos eloszlásfüggvényre is. Ha a kopulát elliptikus eloszlásból származtatjuk a fent leírt módon, akkor *elliptikus kopulának* hívjuk.

Megjegyezzük, hogy különböző peremeloszlásokkal rendelkező eloszlás normális vagy t -kopulával már nem elliptikus eloszlás, az elliptikusság a függőségi struktúrájára igaz, az eloszlásra magára már nem. A modelljeinknél pedig ez a helyzet, hiszen minden egyes peremre külön illesztünk t -eloszlást, amelyek szabadságfokai különbözhetnek. De mi lehet a formaparaméter (illetve korrelációs együttható) jelentése ebben az esetben? Tegyük fel, a korreláció egységnyi a k -dik perem között, ami lineáris függvényeszerű kapcsolatot jelent, vagyis $u_j = u_k^2$ ahol u_j és u_k a kopula k -dik és j -dik pereme. Ekkor az eloszlás megfelelő két perem változója $z_j = t_j^{-1}(u_j)$, $z_k = t_k^{-1}(u_j)$ és így $z_j = F_j^{-1}(F_k(z_k))$, vagyis z_j nemlineáris függvénye z_k -nak. A válasz tehát, hogy a nemlineáris páronkénti korrelációt méri.

7. megjegyzés. Az előbbieken a függőség (és a kockázat) alternatív megközelítéseire koncentráltunk. A kopulák használatával azonban nemcsak a gaussi modellek világából lépünk ki, hanem az elliptikus eloszlásokéból is. Már egy egyszerű t -kopulamoddellel is, amelyekhez t -peremeloszlásokat rendelünk, minőségileg nagyot lépünk, hiszen amellett, hogy az egyes instrumentumok viselkedését egyedileg tudjuk modellezni, a lineáris korreláció fogalmát implicite általánosítjuk.

Az elliptikus kopulák származtatása tehát relatíve egyszerű feladat, ebből a világból kilépve azonban többdimenziós kopulák konstruálása nem egyszerű feladat. Általános

² A lineáris függvényeszerű kapcsolat azt jelenti, hogy $u_j = \alpha u_k + \beta$. Ugyanakkor a t -kopula esetén $\alpha = 1$ és $\beta = 0$, mivel a $u_j = t_{\nu_j}(x_j)$ változók nulla várható értékű és egységnyi varianciájú véletlen változók.

esetben többdimenziós kopulák létrehozásában fontos szerepet töltenek be a *Laplace-transzformációk*. Jelen alkalmazásban két ilyen transzformációt mutatunk be, az általános tárgyalást illetően ajánljuk a *Joe* [1997] művet.

12. definíció. *LTA (pozitív stabil).*

$$\psi(s) = \exp(-s^{1/\theta}) \quad \theta \geq 1. \quad (2)$$

13. definíció. *LTB (gamma).*

$$\psi(s) = (1 + s)^{-1/\theta}. \quad (3)$$

Ezek segítségével felépíthető a kopulák egy olyan családja, amely igen általános függőségi struktúrával rendelkezik. Mivel a kopulák elmélete igen messzire vezet, ehelyütt nem kívánunk részletekbe bocsátkozni. A (4) formula a kopulák egy ilyen családját definiálja, amelynek $m(m-1)/2$ páronkénti függőségi paramétere van, egy darab globális függőségi paramétere és m darab szimmetria paramétere:

$$C(\mathbf{u}) = \psi \left[- \sum_{i < j} \log K_{ij} \left(e^{-p_i \psi^{-1}(u_i)}, e^{-p_j \psi^{-1}(u_j)} \right) + \sum_{j=1}^m v_j p_j \psi^{-1}(u_j) \right]. \quad (4)$$

A felírásban $\psi(s)$ a Laplace-transzformációt jelenti, a K_{ij} függvények pedig kétdimenziós kopulákat. A *Joe* [1997] könyv alapján ezt a családot az *MMx* kopuláknak fogjuk a következőkben nevezni.

A K_{ij} függvények, vagyis a kétdimenziós kopulák alkotják a magasabb dimenziószámú kopulák építőköveit. Kétdimenziós kopulák egyszerű struktúrájúak, és egyszerűen konstruálhatóak. Előszóretetel használják őket, mivel még grafikusán ábrázolhatók. Ugyanakkor kevésbé praktikusak, hiszen a kétdimenziós portfóliók vizsgálatának nincsen gyakorlati jelentősége. Két fontos kétváltozós kopulát ismertetünk, amelyek a szakirodalomban széles körben elterjedtek, és amelyeket ebben a tanulmányban is fel fogunk használni.

14. definíció. *B6 család (Gumbel [1960]).* $1 \leq \delta \leq \infty$ korlátok mellett

$$C(u_1, u_2) = \exp\left(-\left(z_1^\delta + z_2^\delta\right)^{1/\delta}\right), \quad (5)$$

ahol is $z_j = -\log u_j$.

15. definíció. *B7 család (Galambos [1975]).* $1 \leq \delta \leq \infty$ korlátok mellett

$$C(u_1, u_2) = u_1 u_2 \exp\left(\left(z_1^{-\delta} + z_2^{-\delta}\right)^{-1/\delta}\right),$$

ahol is $z_j = -\log u_j$.

A 12–15. definíciókra alapozva a következő három, nem elliptikus kopulát használtuk fel rövid elemzésünkben. Ha ψ *LTA* és a K_{ij} -k a *B6* családból valók, akkor az *MM1*-kopulát kapjuk, ha ψ *LTB* és a K_{ij} -k, a *B7* családdhoz tartoznak, akkor az *MM2*-kopulát kapjuk, ha pedig ψ *LTA* és a K_{ij} -k a *B7* családdhoz tartoznak, akkor *MM3* kopulát kapjuk meg. A paraméterek értelmezése a következő: a $\psi(s)$ -hez tartozó θ paraméter határozza meg a globális függőség mértékét, a K_{ij} kopulák δ_{ij} koefficiensei a páronkénti függőségeket, v_j paraméterek pedig a szimmetria mértékét határozzák meg. Tekintve, hogy behelyettesítés után a konkrét formák igen bonyolultak, ezért ehelyütt nem jelenítjük meg. Az érdeklődő olvasó megtalálja a levezetéseket a forráscikkben.

8. megjegyzés. *Bizonyítható, hogy a felsorolt MM1–MM3 kopulák mindegyike aszimptotikusan összefüggő. Emellett láttuk, hogy ennek a kopulacsaládnak van globális függőségi paramétere is (θ). Mint elemzéseinkből majd kiderül, a t -kopulánál hasonló funkciót tölt be a szabadságfok-paraméter (v). Magasabb szabadságfok ugyanis kisebb aszimptotikus és kisebb globális függőséget jelent, és megfordítva.*

Mivel a modell becslését likelihood módszerrel fogjuk végezni, ezért szükségünk van a sűrűségfüggvényekre. Ez, mint ismeretes, az eloszlásfüggvény m -rendű vegyes parciálisa, vagyis

$$c_{MMx}(\mathbf{u}) = \frac{\partial^m C_{MMx}(\mathbf{u})}{\partial u_1 \dots \partial u_m}.$$

A (4) képletből látható, hogy a

$$h(x_1, \dots, x_m) = f[g(x_1, \dots, x_m)]$$

általános formulának kell a vegyes parciálisait előállítanunk m fokszámig. Mivel a $g(\cdot)$ leképzés a K_{ij} kétdimenziós kopulák összegéből áll össze, ezért csak az első- és másodrendű vegyes parciális deriváltjai lehetnek zérustól különbözők, ami némileg egyszerűsíti a számításokat.

9. megjegyzés. *Mi egy egyszerű szimbolikus deriváló algoritmust készítettünk, amely az MMx kopulák vegyes parciálisait előállítja tetszőleges m -re. Megjegyezzük, hogy $m = 6$ esetén 96 tagú a derivált, amely igen nagy ütemben emelkedik m növelésével. Az MMx sűrűségfüggvényének előállítása tehát számítástechnikai szempontból igen költséges.*

A Student t -kopulából való mintavétel viszonylag egyszerű feladat. Első lépcsőben egy x_1, \dots, x_m véletlen mintát veszünk az (\mathbf{R}, ν) paraméterű többdimenziós t -eloszlásból. Ehhez először a többdimenziós standard t -eloszlásból veszünk egy véletlent vektort, mégpedig

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{z}}{\chi_\nu / \sqrt{\nu}} \quad \mathbf{z} \sim N_m(\mathbf{0}, \mathbf{I}), \quad \chi_\nu = \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_\nu^2}, \quad \xi_j \sim i.i.d N(0, 1)$$

formula alapján, majd a 9. definíció alapján a kívánt paraméterekkel rendelkező eloszlású vektorra alakítjuk. Ezt a vektort aztán komponensenként egyenletes eloszlású változókká transzformáljuk a $u_1 = t_\nu(x_1), \dots, u_m = t_\nu(x_m)$ formula alapján, ahol $t_\nu(\cdot)$ a standard t -eloszlást jelenti.

Az MMx kopulák esetén ilyen egyszerű módszer nem áll rendelkezésre, ezért egy másik utat kell követnünk.

– Vegyünk egy p_1 egyenletes eloszlású változót, és oldjuk meg a $p_1 = C(u_1, 1, \dots, 1)$ egyenletet u_1 -re.

– Vegyünk egy p_j egyenletes eloszlású változót, és oldjuk meg a $p_j = C_j(u_j | u_1, \dots, u_{j-1})$ egyenletet u_j -re,

ahol

$$C_j = (u_j | u_1, \dots, u_{j-1}) = \Pr(U_j \leq u_j | U_1 = u_1, \dots, U_{j-1} = u_{j-1}) \\ = \frac{\partial^{j-1} C(u_1, \dots, u_{j-1}, u_j, \dots, 1)}{\partial u_1 \dots \partial u_{j-1}} / \frac{\partial^{j-1} C(u_1, \dots, u_{j-1}, 1, \dots, 1)}{\partial u_1 \dots \partial u_{j-1}}.$$

és ezt ismételjük meg $j = 2, \dots, m$ -re.

Ha $C_j^{-1}(\cdot)$ nem írható fel zárt alakban, akkor u_j -ket numerikus gyökkereső módszerrel kell kiszámítanunk. A $C_j(\cdot)$ deriváltjainak kiszámítása az MMx kopulák esetében bonyolult, így célszerű olyan algoritmus használata, amely nem igényli a gradiens kiszámítását. Mi *Brent* módszerét használtuk, amely a *Press és szerzőtársai* [1992] műben megtalálható.

Mindkét eloszlástípus esetén a mintavétel első lépése mindig az, hogy egyenletes eloszlásból kell egy véletlen vektort generálni, majd ezt transzformáljuk a kívánt eloszlásúvá. Mivel több időszakra vonatkozóan illesztjük ugyanazokat a modelleket, ezért célszerű a kiinduló egyenletes eloszlásból származó véletlen számoknak ugyanazzal a halmazával dolgozni minden időszakban, és az adott időszakra becsült kopulaparaméterek alap-

ján a kívánt eloszlásba transzformálni. Ezzel csökkenthető a becslések varianciája, hiszen a becslések nincsenek mintavételi ingadozásnak kitéve, csupán a paraméterbecslések hibájával terhelvek.

A t -kopulamodell paraméterének likelihood becsléséhez lokális optimalizáló módszert használtunk, amivel kedvező tapasztalataink voltak. Az MMx kopuláknál viszont a feladat komplexitásából adódóan globális módszer használata vált szükségessé. Mi a *Gablonsky* [2000] által készített és publikált Lipschitz optimalizáló algoritmust használtuk fel.³

10. megjegyzés. *Elemzésünkben nem mutatunk be többdimenziós gaussi modellt, ugyanis mint látni fogjuk, nem érdemes. A portfóliók egydimenziós eloszlására illesztettünk viszont normális eloszlást. Ha ugyanis a normalitást valószínűségi változók összegének eloszlására követeljük meg, nem pedig minden egyes változóra, akkor a normalitás szempontjából nyilvánvalóan egy engedékenyebb modellt kapunk. Amint látni fogjuk majd, ez a modell is alulmarad a többi alternatívával szemben.*

Két piacot fogunk vizsgálni, az amerikai és a magyar piacot. A három-három *Dow Jones* és *BUX* részvényből készítünk portfóliókat, és ezek hozamaira próbáljuk meg a fent leírt hat modellt illeszteni. A modellek értékelését három kritérium alapján végezzük. Először χ^2 -teszt segítségével a modellek illeszkedését vizsgáljuk meg. Ezután $\alpha = 95, 99$ és $99,5$ százalékos VaR-értékeket számolunk, amelyeket szintén formális teszt alapján értékelünk. A formális tesztek után kvalitatív elemzést végzünk, vagyis grafikonok segítségével próbáljuk értelmezni az eredményeinket.

A modellek becslése és értékelése után megvizsgáljuk a többdimenziós normalitás hipotézisét az idősorvektorokra. A teszteléshez a *Pataki* [2001] cikkben bemutatott és vizsgált többdimenziós Shapiro–Wilk-teszteket fogjuk felhasználni.

Dow Jones-részvények

Alapadatok

Mintaidőszak: 1990. február 26.–2001. február 22. (2778 megfigyelés)

Részvények: *General Electric (GE)*, *General Motors (GM)*, *Citigroup (CI)*

Ablak mérete: 500 (összesen 2279 periódus)

Monte-Carlo-szimuláció mérete: $r = 10\,000$

Illeszkedésvizsgálat. A portfóliómodellek esetében jó illeszkedést tapasztaltunk. Az egydimenziós t -modell illeszkedését legalább 5 százalékos szignifikanciaszinten a legtöbb periódusban elfogadtuk. A többdimenziós modellek közül a t -kopulamodell és az $MM2$ -modell (mindkettő t -eloszlású peremekkel) bizonyult szignifikánsnak a tesztek alapján, a legtöbb periódusban az illeszkedés 5 százaléknál magasabb szinten elfogadható volt. 1996 és 1998 között voltak „gyenge” periódusok, amikor az illeszkedések szignifikanciája alacsonyabb volt, de az 1 százalékos szint felett maradt. Az $MM1$ - és $MM3$ -kopulamodellek a legtöbb esetben még az 1 százalékos szintű illeszkedést sem érték el.

VaR-becslések. A formális tesztek eredményeit a 2–7. táblázatokban foglaltuk össze. $\alpha = 5$ százalék, 1 százalék és 0,5 százalék szintű VaR-értéket számoltunk. Az empirikus hibák értékét dőlt betűkkel szedtük, és a táblázatok második soraiban találhatóak. Az utolsó sorok tartalmazzák a Kupiec-teszt értékét (*Kupiec* [1995]), illetve az empirikus szignifikanciáját, vagyis a p -értéket. A teszt alapelve az, hogy a például 5 százalékos

³ A témáról kiváló áttekintést talál az olvasó a *Pintér* [1996] és *Zhigljavsky* [1991] művekben.

2. táblázat
Egydimenziós gaussi modell

Megnevezés	VaR-konfidenciaszint		
	5 százalék	1 százalék	0,5 százalék
Hibaaarány (százalék)	4,70	1,32	1,05
Kupiec-teszt	0,46	2,10	10,61
p -érték (százalék)	49,99	14,77	0,11

3. táblázat
Egydimenziós Student t -modell

Megnevezés	VaR-konfidenciaszint		
	5 százalék	1 százalék	0,5 százalék
Hibaaarány (százalék)	4,91	1,10	0,70
Kupiec-teszt	0,04	0,21	1,66
p -érték (százalék)	85,09	64,69	19,75

4. táblázat
Student t -kopula

Megnevezés	VaR-konfidenciaszint		
	5 százalék	1 százalék	0,5 százalék
Hibaaarány (százalék)	4,17	1,05	0,61
Kupiec-teszt	3,51	0,06	0,56
p -érték (százalék)	6,11	80,06	45,52

5. táblázat
MM1-kopula

Megnevezés	VaR-konfidenciaszint		
	5 százalék	1 százalék	0,5 százalék
Hibaaarány (százalék)	7,15	2,15	1,18
Kupiec-teszt	19,72	22,90	15,48
p -érték (százalék)	0,00	0,00	0,01

VaR-értéknél csak az esetek nagyjából 5 százalékában kaphatunk nagyobb veszteséget. A Kupiec-teszt azt ellenőrzi, hogy az ettől való eltérés szignifikáns-e, vagy csak a mintavételi ingadozás okozza.

Mindkét portfóliómodell esetében elfogadható illeszkedést tapasztaltunk, bár a t -modellre vontakozó eredmények jóval meggyőzőbbek. A gaussi modellből számított empirikus hibák 1 és 5 százalékos szinteken meglehetősen nagyok. Ha számításba vesszük, hogy a t -modell nem sokkal bonyolultabb, és nem igényel jelentősebb számítástechnikai kapacitásokat, mint a normális modell, akkor mindenképpen a t -modellt érdemes választani.

Az illeszkedésvizsgálat eredményeivel összhangban a t -kopula és az MM2-modellek-

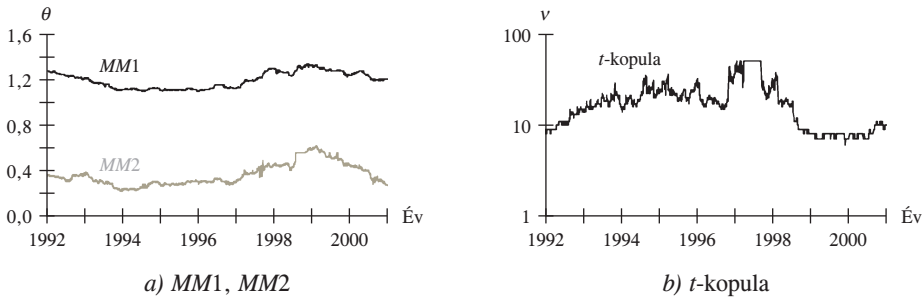
6. táblázat
MM2-kopula

Megnevezés	VaR-konfidenciaszint		
	5 százalék	1 százalék	0,5 százalék
Hibaaarány (százalék)	5,66	1,10	0,61
Kupiec-teszt	2,01	0,21	0,56
p -érték (százalék)	15,62	64,69	45,52

7. táblázat
MM3-kopula

Megnevezés	VaR-konfidenciaszint		
	5 százalék	1 százalék	0,5 százalék
Hibaaarány (százalék)	7,06	2,15	1,23
Kupiec-teszt	18,23	22,90	17,26
p -érték (százalék)	0,00	0,00	0,00

2. ábra
Globális függőség – Dow Jones-részvények

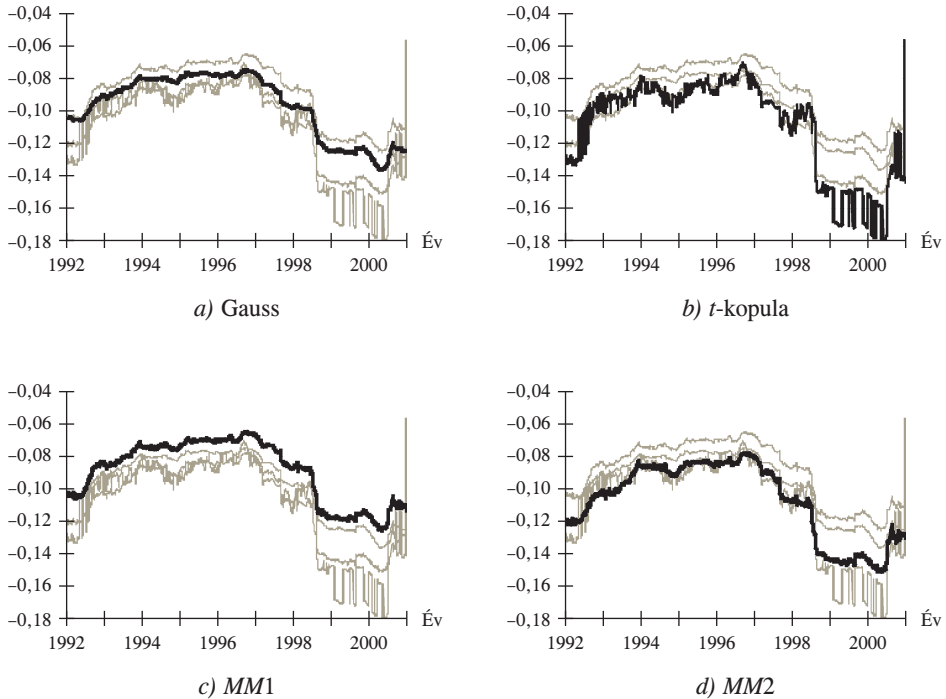


ből számított VaR-értékek a formális teszten átmentek, míg a másik két modellből számítottak nem. Az $MM1$ - és $MM3$ -kopulamodellekből számított empirikus hibák igen magasak, ennek megfelelően a p -értékek nullák. A t -kopulamodell $VaR_{0,99}$ -értéke kicsit jobb teszt eredményt mutat, mint az $MM2$ -modellből számított, míg $VaR_{0,95}$ érték az utóbbinál bizonyult biztosabbnak. A $VaR_{0,995}$ -értéknél gyakorlatilag azonosak a teszt-eredmények.

Kvalitatív vizsgálat. A Dow Jones-piacon végbemenő folyamatok jól nyomon követhetők a globális függőséget mérő paraméterek változásán keresztül. Az MMx kopuláknak van is egy ilyen paramétere (θ), míg a t -kopula esetében a globális függőséget a szabadságfok-paraméteren (ν) keresztül tudjuk megragadni. A 2. ábrán ezek értékét ábrázoltuk az egyes periódusokra. Mivel az $MM1$ - és $MM3$ -kopulák általában hasonló eredményeket produkáltak, így csak egyikőjük paraméterét tettük fel a grafikonra.

Amint az illeszkedésteszték eredményeiben bekövetkező bizonytalanság is utalt rá, az 1996–1998 közötti időszakban egy drámai változás következett be a piacon, legalábbis a három vizsgált részvényt illetően. Ezekben a periódusokban a globális függőség csökkent (ami a t -kopulamodell esetében a ν paraméter növekedésével jár együtt), a piac

3. ábra

VaR_{0,99}-becslések – Dow Jones-részvények

úgymond „szétszakadt”. A peremeloszlásokra pillantva azt látjuk (4. ábra), hogy GE-részvény hozamára illesztett t -eloszlás szabadságfoka a $\nu_{GE} = 30\text{--}50$ tartományban mozog, vagyis közelítőleg normális eloszlású. Ezzel ellentétben GM-hozamoknál $\nu_{GE} = 7\text{--}12$ szabadságfokokat becsültünk, ami leptokurtikus eloszlásra utal. A harmadik részvényre becsült szabadságfokok (CI) a $\nu_{CI} = 33$ értékről $\nu_{CI} = 7$ értékre csökkentek, az eloszlás 1998 végére csúcsossá, hosszan elnyúlóvá vált.⁴ Később a piac ismét visszaállt, és mindhárom részvényre becsült paraméterek visszatértek a korábbi $\nu = 4\text{--}15$ körüli szintre. Az 1996-os eseményekhez hasonló történt újra 2000 tavasza körül. Látszólag a GE-részvénynek tulajdoníthatók túlnyomó részben az említett változások, hiszen e részvény szabadságfoka távolodik el a többiekétől mindkét esetben, ami a globális függőség csökkenését vonja maga után.

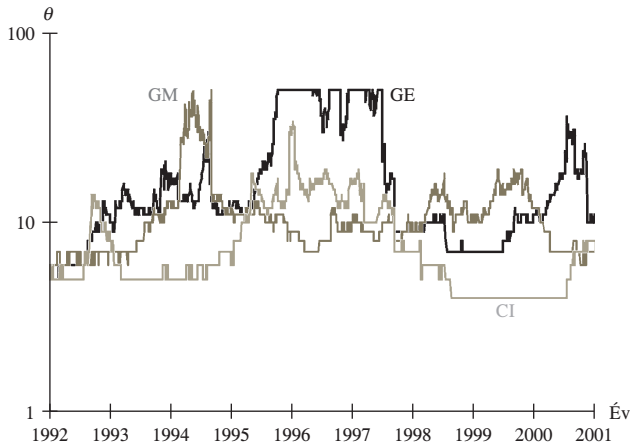
A 3. ábrára pillantva, azt találjuk, hogy a VaR_{0,99}-értékek pontosan követik a globális függőség változását. Amikor ugyanis az egyes részvények elkezdnek különbözőképpen viselkedni, vagyis portfólióink diverzifikálódik, akkor az egymástól való globális függőség csökken, ami alacsonyabb kockázatot jelent, s ezért az egyes modellekből számított VaR-értékek is alacsonyabbak lesznek.

A teljesség kedvéért néhány szót szólunk a páronkénti függőségről is. Az MM2-kopula δ_{ij} paraméterének idősora bár zajos, mégis egy struktúra látszik körvonalazódni benne. A $\delta_{GE,GM}$ paraméter monoton csökkent, míg a $\delta_{GE,CI}$ paraméter monoton nőtt (vagyis egyre erősebben együtt mozogtak) a teljes vizsgált időszakra a gyenge időszakot kivéve, amikor is a tendencia megfordult. Ezalatt $\delta_{GM,CI}$ konstans maradt, és gyenge függőséget

⁴ Ez a tendencia egészen 2000. augusztusig folytatódott, mikor a $\nu = 4$ minimális értéket ért el.

4. ábra

Peremeloszlások – Dow Jones-részvények



mutatott. Mivel a páronkénti függőség és a portfólió kockázata között nehéz a kapcsolatot megtalálni, így ezek a paraméterek önmagukban nem sok konklúzióval szolgálnak.

Habár a t -kopula és az $MM2$ -kopulamodellekből nagyjából ugyanakkora VaR-értékeket számolunk, a t -kopulamodell becslései meglehetősen zajosak. Ez különösen a gyenge periódusokban érzékelhető, amikor a GE-hozamok és a kopula szabadságfok-paraméterei is magasak. Ez abból a tényből ered, hogy a szabadságfokok magasabb tartományában, például egy t_{20} és t_{25} modell között, nincs igazán nagy különbség, míg mondjuk egy t_2 és t_3 modell között igen éles a határ.

A többdimenziós normalitástesztek eredményei egyhangúan azt sugallták, hogy a normalitás hipotézise az 1997. január–1997. április és 2000. november–2001. január időszakokat kivéve nem állja meg a helyét. Nem meglepően mindkét időszak a gyenge időszakokba esik, amikor is diverzifikáltabb portfóliónk van, és alacsonyabb veszteséget várunk a becsült VaR-értékek alapján. Habár erősen megkérdőjelezhető, hogy ezekben az időszakokban az együttes eloszlás valóban normális,⁵ ez részben mégis magyarázatul szolgál arra, hogy a korábbi, a normalitás hipotézisére épített modellek bizonyos időszakokban miért látszottak működni. Ezek a korai modellek akkor vallottak kudarcot, amikor extrém események egyszerre következtek be, amelyek modellezésére a jelen állapotban bemutatott modellek alkalmasak, a gaussi modellek nem, és ezért többnyire jelentős mértékben alulbecsülik a várható veszteségeket.

BUX-részvények

Alapadatok

Mintaidőszak: 1997. november 17.–2001. május 8. (864 megfigyelés)

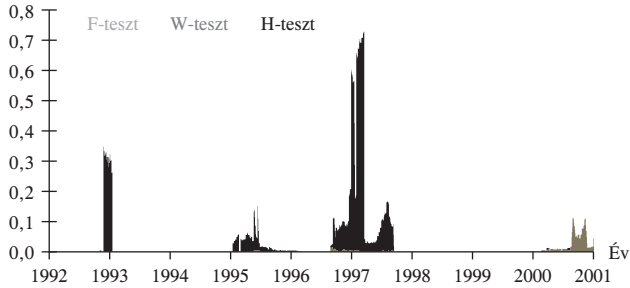
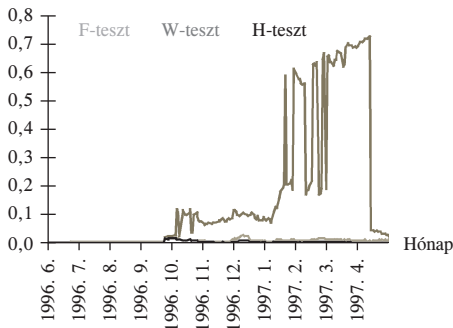
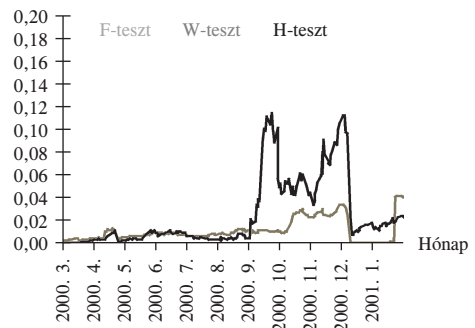
Részvények: *Mol Rt.*, *Matáv Rt.*, *OTP Bank Rt.*

Ablak mérete: 250 (összesen 615 periódus)

Monte-Carlo-szimuláció mérete: $r = 10\,000$

⁵ A peremeloszlások ugyanis igen eltérők, ami egy nem szimmetrikus együttes eloszlásra utal. Az egyik perem közel normális eloszlású, míg más peremek leptokurtikus eloszlások, ezek közt még t_7 -eloszlást is találunk.

5. ábra

A többdimenziós normalitás tesztek p -értékeia) A többdimenziós normalitás tesztek p -értékei (1992–2001)b) Kritikus p -értékek (1996–1997)c) Kritikus p -értékek (2000–2001)

Illeszkedésvizsgálat. A portfóliómodellek, különösképpen az egydimenziós t -modell, igen jó illeszkedést produkáltak, a tesztből számított empirikus szignifikanciaszintek 5 százalék felett voltak a legtöbb időszakban. A t -kopulamodell hasonlóan jól illeszkedett 5 százalék, illetve 10 százalék szinten a legtöbb periódusban. Az MMx modellek egyike sem volt szignifikáns a teljes vizsgált időszakban. Az $MM2$ jól illeszkedett az első periódusokban, 5 százalékos szinten elfogadható volt, majd 2000. november környékén már 1 százalék alá esett. Az $MM1$ - és $MM3$ -modellek az 1999. szeptember és 2000. november közti periódusokban mutattak szignifikáns illeszkedést. Ezután az időpont után csak a t -kopulamodell illeszkedett, és az illeszkedése nem romlott.

VaR-becslések. A formális tesztek eredményeit a 8–13. táblázatokban foglaltuk össze. Az egydimenziós normális és t -modellekre hasonló eredményeket kaptunk. A $VaR_{0,95}$ - ($\alpha = 5$ százalék) becslések meglehetősen konzervatívak, ami az alacsony backteszt értékekben tükröződik. A $VaR_{0,99}$ - és $VaR_{0,995}$ -veszteségeket a t -modell felül-, míg a normális modell alulbecsüli. Az összes számított becslés szignifikáns 5 százalékos szinten. Mindezt összevetve, a t -modell a jobb alternatíva.

Az illeszkedésvizsgálat által hozott eredményekkel ellentétben az $MM1$ - és $MM3$ -kopulamodellek igen jó becsléseket adtak. Az empirikus hibák közel estek a megadott $\alpha = 5$, 1 és 0,5 százalékos értékekhez és szignifikánsnak bizonyultak. A t -kopula és az $MM2$ -kopulamodellek becslései meglehetősen konzervatívak, de minden szignifikanciaszinten

8. táblázat
Egydimenziós gaussi modell

Megnevezés	VaR-konfidenciaszint		
	5 százalék	1 százalék	0,5 százalék
Hibaarány (százalék)	3,58	1,14	0,81
Kupiec-teszt	2,90	0,11	1,02
p -érték (százalék)	8,87	73,61	31,31

9. táblázat
Egydimenziós Student t -modell

Megnevezés	VaR-konfidenciaszint		
	5 százalék	1 százalék	0,5 százalék
Hibaarány (százalék)	3,74	0,81	0,33
Kupiec-teszt	2,24	0,23	0,43
p -érték (százalék)	13,41	63,00	51,14

10. táblázat
Student t -kopula

Megnevezés	VaR-konfidenciaszint		
	5 százalék	1 százalék	0,5 százalék
Hibaarány (százalék)	1,79	0,65	0,33
Kupiec-teszt	17,54	0,87	0,43
p -érték (százalék)	0,00	35,20	51,14

11. táblázat
MM1-kopula

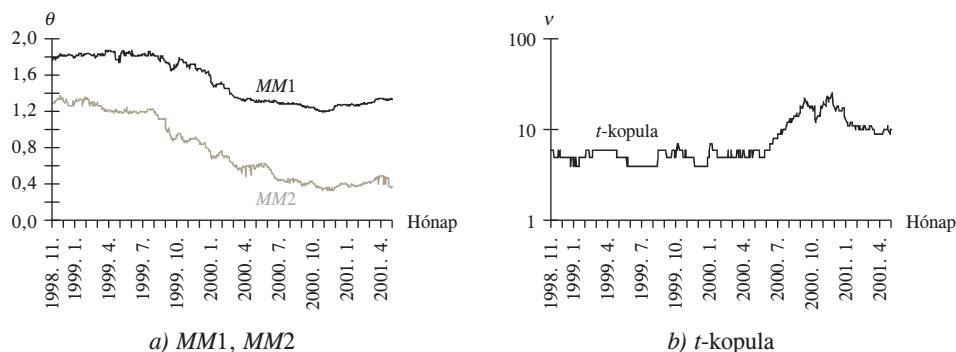
Megnevezés	VaR-konfidenciaszint		
	5 százalék	1 százalék	0,5 százalék
Hibaarány (százalék)	4,39	1,14	0,49
Kupiec-teszt	0,50	0,11	0,00
p -érték (százalék)	47,90	73,61	96,57

12. táblázat
MM2-kopula

Megnevezés	VaR-konfidenciaszint		
	5 százalék	1 százalék	0,5 százalék
Hibaarány (százalék)	3,90	0,65	0,33
Kupiec-teszt	1,68	0,87	0,43
p -érték (százalék)	19,47	35,20	51,14

13. táblázat
MM3-kopula

Megnevezés	VaR-konfidenciaszint		
	5 százalék	1 százalék	0,5 százalék
Hibaaarány (százalék)	4,23	1,14	0,49
Kupiec-teszt	0,81	0,11	0,00
p -érték (százalék)	36,72	73,61	96,57

6. ábra
Globális függőség – BUX részvények

elfogadhatók (kivéve a t -kopula modell $\text{VaR}_{0,95}$ -becslését). Megjegyezzük, hogy mivel az $MM2$ az illeszkedésesztelen nem mindenhol ment át, ezért teljes biztonsággal csak a Student t -kopula modell ajánlható.

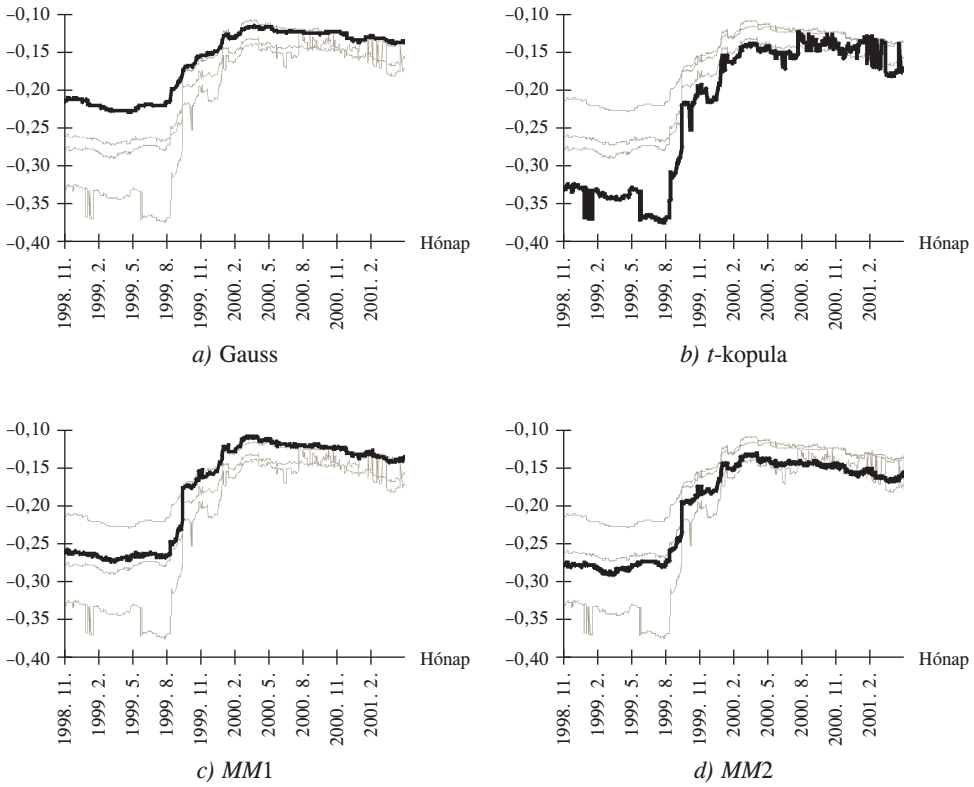
Kvalitatív vizsgálat. Mivel a mintaidőszak meglehetősen rövid volt, ezért igazán komoly következtetéseket nem lehet az eredményekből levonni. Ez a piac egészen más mögöttes logika szerint működik, mint a Dow Jones-részvények piaca. Valójában ez a piac sokkal érdekesebb is, hiszen az extrém események együttes bekövetkezésének valószínűsége sokkal nagyobb, ezért a befektetések várható kockázata is magasabb.

Először pillantsunk a 6. ábrára, ahol a globális függőséget meghatározó paraméterek idősrát ábrázoltuk a t -kopula-, az $MM1$ - és $MM2$ -modellek esetében. A helyzet a következő: nagyjából 1999 decemberéig egy kockázatos időszakot találunk, amit a t -kopula-modellre becsült alacsony, $\nu = 4-7$ szabadságfokok, illetve az MMx modellekre becsült magas θ -k sejtetnek. Megjegyezzük, hogy $MM1$ - és $MM2$ -modelleket különböző LT -vel konstruáltuk, így θ -iknak is más az alsó korlátja. Egy alacsony globális függőséggel jellemzett csendesebb időszak következik nagyjából 2000. november-decemberéig, azután pedig a globális függőség ismét növekedni kezd. Ebben az utolsó szakaszban gyengül az MMx -modellek illeszkedése.

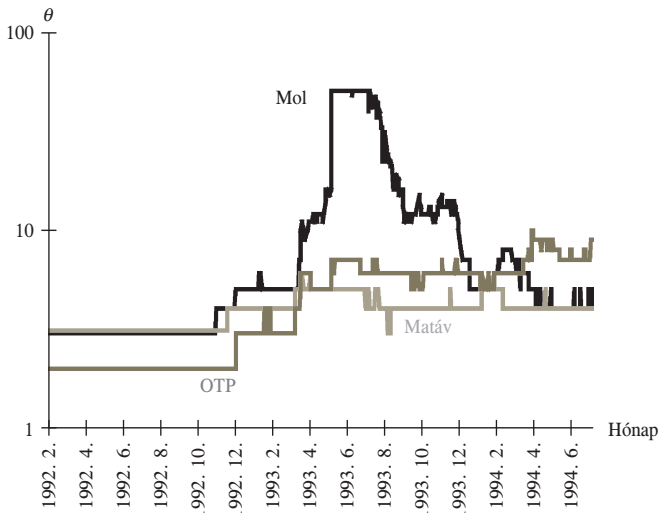
A 99 százalékos VaR-értékek ugyanezt a mozgást írják le, amint azt a 7. ábrán láthatjuk. A kockázatos időszakban a várható veszteségek magasabbak, míg az 1999 decemberétől 2000 decemberéig tartó időszakban ez mérséklődik. Ezután pedig a portfólió ismét kockázatosabbá válik.

Ha megnézzük a peremeloszlásokat (8. ábra), világosan látszik, hogy egyetlen részvény (Mol) egymagában felelős a portfólió diverzifikációjáért. 1999 decemberéig a portfóliónkban $\nu = 4-7$ szabadságfokú t -kopula és $\nu = 4-5$ szabadságfokú t -peremelosz-

7. ábra
VaR_{0,99}-becslések – BUX-részvények



8. ábra
Peremeloszlások – BUX-részvények



lásokkal leírható hozamokkal bíró részvények vannak. Ettől az időponttól kezdve viszont a Mol-papírok hozamának eloszlása kezd a normális eloszláshoz közelíteni (vagyis a szabadságfoka növekedni kezd, míg nem eléri a maximális $\nu = 50$ értéket). Ezzel párhuzamosan csökken a globális függőség, a kopula szabadságfoka $\nu = 25$ értékig emelkedik. Mikor pedig ν_{Mol} ismét csökkenni kezd, a globális függőség és a portfólió kockázatossága megint növekedni kezd.

A többdimenziós normalitás tesztek az együttes normalitásnak semmilyen jelét sem mutatták. A magyar piac kockázatossága miatt tehát egy tipikusan olyan alkalmazási terület, ahol a normalitásra épülő modelleknek nincsen gyakorlati relevanciája.

Hivatkozások

- ANDERSON, T. W. [1958]: Multivariate Statistical Analysis. Wiley, New York.
- ARTZNER, P.–DELBAEN, F.–EBER, M.–HEATH, D. [1999]: Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance*, 9. 203–208. o.
- EMBRECHTS, P.–MCNEIL, A.–STRAUMAN, D. [1999]: Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls. Preprint ETH, Zürich.
- FANG, K.T.–KOTZ, S.–NG, K.W. [1990]: Symmetric Multivariate and Related Distributions. Chapman and Hall, London.
- GABLONSKY, J. M. [2001]: DIRECT 2.0 User Guide. North Carolina State University, Dept. of Mathematics.
- GALAMBOS J. [1975]: Order Statistics of Samples from Multivariate Distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 674–680. o.
- GUMBEL, E. J. [1960]: Distributions des valeurs extremes en plusieurs dimensions. *Publications of the Institute of Statistics, University of Paris*, 171–173. o.
- JOE, H. [1997]: Multivariate Models and Dependence Concepts. Chapman and Hall, London.
- KÓBOR ÁDÁM [2000]: A feltétel nélküli normalitás egyszerű alternatívái a kockázatot érték számításában. *Közgazdasági Szemle*, 11. sz. 878–898. o.
- KUPIEC, P. [1995]: Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models. *The Journal of Derivatives*, 73–84. o.
- LINDSKOG, F. [2000]: Linear Correlation Estimation. RiskLab Report. ETH–Zentrum, Zürich.
- MARKOWITZ, H. [1959]: Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, március.
- PALÁGYI ZOLTÁN [2001]: Piaci hozamok modellezése stabil eloszlásokkal. PhD-értekezés, Budapesti Közgazdasági és Államgazgatási Egyetem, Budapest.
- PATAKI ATTILA [2001]: A többváltozós Shapiro–Wilk-tesztek vizsgálata. *Sigma*, megjelenés alatt.
- PINTÉR JÁNOS [1996]: Global Optimization in Action: Continuous and Lipschitz Optimization: Algorithms, Implementation and Applications. Kluwer Academic Publisher.
- PRESS, W. H.–TEUKOLSKY, S. A.–VETTERLING, W. T.–FLANNERY, B. P. [1992]: Numerical Recipes. Megjelent: C: The Art of Scientific Computing. Cambridge University Press, New York (második kiadás).
- SKLAR, A. [1996]: Random Variables, Distribution Functions and Copulas – a personal look backward and forward. Megjelent: *Rüschendorf, L.–Schweitzer, B.–Taylor, M. D.:* Distributions with Fixed Marginals and Related Topics. Institute of Mathematical statistics, Hayward CA., 1–14. o.
- WICHURA, M. J. [1988]: Algorithm AS241: The percentage points of the normal distribution. *Applied Statistics*, 477–484. o.
- ZHIGLJAVSKY, A. A. [1991]: Theory of Global Random Search. (Szerk.: *Pintér János.*) Kluwer Academic Publisher.